$\boxed{604}$ - Actividade Formativa 1 - 1ª Parte

Escolha múltipla

Em cada questão apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respectivo.

1. Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Então:

☐ **a)** $2A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}$.

☐ **b)** $AB = \begin{bmatrix} 15 & -4 & 0 \\ 4 & -21 & -4 \end{bmatrix}$.

☐ **c)** $C^2 = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$.

☐ **d)** $A + C = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 5 & 11 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Então:

☐ **a)** $A^2 = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$.

☐ **b)** $A = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$.

☐ **c)** $A^2 + 6A + 9I_3 = 0$.

☐ **d)** $AA^T = 9I_3$.

3. Sejam $A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$. Então:

☐ **a)** $A^{99}B = AB$.

☐ **b)** $AB = (BA)^*$.

☐ **c)** $AB = BA$.

☐ **d)** $B^2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

4. Considere as matrizes $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $n \geq 2$. Então tem-se sempre:

☐ **a)** Se $A^T X = 0$ então $X^T AB = 0$.

☐ **b)** Se $AX = AY$ então $X = Y$.

☐ **c)** Se $AX = 0$ então $A = 0$ ou $X = 0$.

☐ **d)** Se $AX = 2BX$ então $A = 2B$.

5. Em $\mathbb{R}^3$ as soluções do sistema $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ são dadas por:

☐ **a)** $(0,0,z)$ com $z \in \mathbb{R}$.

☐ **b)** $(x,y,0)$ com $x, y \in \mathbb{R}$.

☐ **c)** O sistema é impossível.

☐ **d)** $(0,0,0)$ é a única solução.

6. Considere, o sistema $\begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & \beta \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -7 \\ \gamma \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Considere as afirmações:

(i) Existem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ para os quais $(1,2,3)$ é solução do sistema.

(ii) Existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para os quais o sistema homogéneo associado é indeterminado.

(iii) Para $\alpha = 0$, $\beta = 1$ existe, pelo menos, um $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que o sistema é impossível.

Então:

☐ **a)** Nenhuma das afirmações é verdadeira.

☐ **b)** Apenas uma das afirmações é verdadeira.

☐ **c)** Apenas duas das afirmações são verdadeiras.

☐ **d)** Todas as afirmações são verdadeiras.

7. Considere a matriz de blocos $B = \left[\begin{array}{c|c} A & I_3 \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{3\times 6}$, onde $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Então tem-se sempre:

☐ **a)** $B^T = \left[\begin{array}{c|c} A^T & I_3 \end{array}\right]$.

☐ **b)** $B^T = \left[\begin{array}{c} A^T \\ \hline I_3 \end{array}\right]$.

☐ **c)** $B^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} I_3 & A^{-1} \end{array}\right]$.

☐ **d)** $B^{-1} = \left[\begin{array}{c} A^{-1} \\ \hline I_3 \end{array}\right]$.

8. Seja $n \geq 2$. Suponhamos que $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ são duas matrizes invertíveis. Sejam $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ matriz de incógnitas, $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ matriz de termos independentes. Considere as seguintes afirmações:

(i) O sistema $BA^{-1}x = b$ tem solução $x = AB^{-1}b$.

(ii) O sistema $A^T x = b$ é equivalente a $x^T A = b^T$.

(iii) Se $B = A^{-1}$ então $Ax = b$ e $Bx = b$ são equivalentes.

Então tem-se sempre:

☐ **a)** Nenhuma das afirmações é verdadeira.

☐ **b)** Apenas uma das afirmações é verdadeira.

☐ **c)** Apenas duas das afirmações são verdadeiras.

☐ **d)** Todas as afirmações são verdadeiras.

Verdadeiro/Falso

Para mostrar que uma afirmação verdadeira tem de apresentar uma demonstração. Para mostrar que é falsa tem de apresentar um contra-exemplo.

9. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes:

a) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Então $AA^T = 14 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

b) Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A + A^T = 0$. Então os elementos da diagonal principal de A são todos iguais a zero.

c) Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A^2 = 0$. Então A é singular e $\operatorname{rank} A = 0$.

d) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ tem característica 3.

Problemas Práticos

Justifique todas as afirmações e apresente os cálculos realizados para as obter

10) Considere os sistemas de equações lineares

$$(I)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 1 \\ x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 - 4x_4 = 1 \end{cases} \quad (II)\begin{cases} a + 2b + 6c - 1 = 0 \\ b + 3c - 2d - 1 = 0 \\ -a - 4d - 1 = 0 \end{cases} \quad (III)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 1 \\ x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}.$$

Seja S_1 o conjunto das soluções do sistema (I), S_2 o conjunto das soluções do sistema (II) e S_3 o conjunto das soluções do sistema (III).

a) Estabeleça uma relação entre os conjuntos S_1, S_2 e S_3. Justifique.

b) Que pode dizer quanto à natureza dos sistemas (sem os resolver).

c) Caracterize, devidamente, os conjuntos S_1, S_2 e S_3.

d) Considere o sistema de equações lineares $Ax = b$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Determine A^{-1} e use esta matriz para resolver este sistema.

11. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 12 & -2 \\ 0 & 4 & 8 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$.

a) Determine a característica da matriz A, através da sua condensação.

b) Determine o conjunto das soluções do sistema homogéneo $Ax = 0$.

c) Considere os sistema $Ax = b$, com $b \in \mathbb{R}^3$.

c_1) Verifique para que vectores $b \in \mathbb{R}^3$ o sistema $Ax = b$ é possível.

c_2) Determine a natureza dos sistemas $Ax = (1, 1, 1)$ e $Ax = (0, 3, 4)$.

c_3) Prove que se y e w são soluções de $Ax = b$, então $\alpha y + (1 - \alpha)w$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, também é solução do referido sistema.

12) Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema

$$S_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 2x + 2\alpha y - z = 1 \\ 4x + (3\alpha + 1)y + (\beta - 2)z = 1 \\ -2x - 2y + (\alpha - 2\beta + 1)z = 1 - \alpha\beta \end{cases}$$

de três equações lineares sobre $\mathbb{R}$, nas incógnitas x, y, z.

a) Discuta, em função dos parâmetros α, β, o sistema $S_{\alpha,\beta}$.

b) Determine o conjunto de soluções do sistema $\begin{cases} 2x + 2y - z = 0 \\ 4x + 4y - 2z = 0 \\ -2x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$.

c) Faça $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ e faça $S = S_{0,1}$.

c$_1$) Determine a decomposição LU de A, a matriz simples do sistema S, onde L e U representam duas matrizes triangulares (inferior e superior, respectivamente).

c$_2$) Resolva o sistema S por intermédio da resolução de dois sistemas triangulares.

c$_3$) Indique duas soluções de S.

Problemas Teóricos

Demonstre as afirmações

13. Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

a) Mostre que $\mathrm{tr}(AB - BA) = 0$, onde tr denota o traço da matriz (i.e a soma dos elementos da diagonal principal).

b) Mostre que se A e B comutam com $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ então $AB = BA$.

14. Seja $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ com $a, b \in \mathbb{R}$ uma matriz não nula. Mostre que:

a) $AX = 0$ é possível e determinado.

b) A é invertível e $A^{-1} = \dfrac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$.

FIM