

604 - Actividade Formativa 1 - 2ª Parte

ESCOLHA MÚLTIPLA

Em cada questão apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando \times no quadrado respectivo.

1. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Então:

a) $\begin{vmatrix} 2a+c & 2b+d \\ c & d \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. c) $\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

b) $\begin{vmatrix} a+1 & b+1 \\ c+1 & d+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + 1$. d) $\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{vmatrix}$.

2. Se $I_n = 3A + A^2$, onde A é uma matriz quadrada ($n \times n$) e I_n é a matriz identidade de ordem n , então:

a) A é invertível e $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A$. c) A é invertível e $A^{-1} = 3 + A$.

b) A é invertível e $A^{-1} = 3I + A$. d) A não é invertível.

3. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com $n \geq 2$. Considere as afirmações seguintes:

(i) A é não singular sse $|A^T A| \neq 0$.

(ii) $|\lambda A| = \lambda |A|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$

(iii) $|A + A^T| = 2|A|$.

Então:

a) Nenhuma das afirmações é verdadeira.

b) Apenas uma das afirmações é verdadeira.

c) Apenas duas das afirmações são verdadeiras.

d) Todas as afirmações são verdadeiras.

4. Seja $A_k = \begin{bmatrix} 2 & k & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$. Então para todo $k \in \mathbb{R}$:

a) $|A_k| = \begin{vmatrix} 2 & k \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & k \end{vmatrix}$. c) $|A_k| = |A_{-k}|$.

b) $|A_k| \neq 0$. d) $|A_k| = 2 \begin{vmatrix} k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix}$.

5. Considere as matrizes $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ e suponha que $A = B + I_3$. Então tem-se sempre:

- a) $|A| = |B| + 1$. c) $AB = BA$.
- b) $A - I_3$ é invertível. d) $\text{rank } A = \text{rank } B$.

6. Sejam $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ e $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Então, tem-se sempre:

- a) $\text{tr}(AE) = \text{tr } A$ onde tr denota o traço de uma matriz (i.e., a soma dos elementos da diagonal principal).
- b) A é semelhante a AE .
- c) $\text{rank}(AE) = 3$.
- d) $\det(AE) = -\det(A^T)$.

7. Considere uma matriz, singular, $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ que satisfaça as seguintes condições:

$$Av = v \quad , \quad Aw = 2w$$

onde v, w são dois vectores não nulos de \mathbb{R}^3 . Considere as seguintes afirmações:

- (i) $0, 1, 2$ são valores próprios de A .
- (ii) $v + w$ é vector próprio de A associado ao valor próprio 1 .
- (iii) $2v$ é vector próprio de A .

Então:

- a) Nenhuma das afirmações é verdadeira.
- b) Apenas uma das afirmações é verdadeira.
- c) Apenas duas das afirmações são verdadeiras.
- d) Todas as afirmações são verdadeiras.

8. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Seja B uma matriz que é obtida a partir de A , efectuando apenas transformações elementares nas linhas de A . Então tem-se sempre:

- a) O polinómio característico de B é $p(x) = (1 - x)^2(2 - x)$.
- b) As matrizes A e B são semelhantes.
- c) $B^3 = 4B^2 - 5B + 2I_3$.
- d) Existe uma matriz $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ invertível tal que $\text{adj } B = (\text{adj } A)C$.

VERDADEIRO/FALSO

Para mostrar que uma afirmação verdadeira tem de apresentar uma demonstração.
Para mostrar que é falsa tem de apresentar um contra-exemplo.

9. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes:

a)
$$\begin{vmatrix} 0 & 1-k & k-1 \\ 1-k & 1-k^2 & k-1 \\ k-1 & 0 & 1-k \end{vmatrix} = (1-k)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1+k & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \text{ para todo } k \in \mathbb{R}.$$

b)
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -k \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & k \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ k & 1 & -k \end{vmatrix}, \text{ para todo } k \in \mathbb{R}.$$

c) Dado $n \in \mathbb{N}$ existe, pelo menos, uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $\text{rank } A = n - 1$ e 0 não é valor próprio de A .

d) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} \alpha \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que u é vector próprio de A e u, v, w constituem as colunas de uma matriz não singular.

PROBLEMAS PRÁTICOS

Justifique todas as afirmações e apresente os cálculos realizados para as obter

10. Para qualquer $k \in \mathbb{R}$, considere a matriz $A_k = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$.

a) Calcule $|A_k|$ e indique para que valores de $k \in \mathbb{R}$ a matriz A_k é não singular.

b) Determine a característica de A_k para cada $k \in \mathbb{R}$.

c) Seja $B_k = (A_k)_{41}$ (isto é, seja B_k a matriz que se obtém de A_k suprimindo-lhe a 4ª linha e a 1ª coluna).

c₁) Determine $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ de modo que $CB_k = (k-1)^2 I_3$.

c₂) Prove que B_k é invertível sse $k \neq 1$ e determine a sua inversa.

11. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Justifique que A é invertível e determine A^{-1} .

b) Determine o polinómio característico de A . Determine A^{-1} por recurso ao Teorema de Cayley-Hamilton.

c) Determine $\text{adj } A^2$ e $\text{adj}(2A)$.

d) Determine $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que $B \text{adj}(2A) = -2I_3$.

e) Considere o sistema de equações lineares
$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$
 Resolva-o:

e₁) Utilizando a matriz A^{-1} obtida na alínea a).

e₂) Utilizando a regra de Cramer. Justifique, primeiro, que esta regra é aplicável neste caso.

12. Considere uma matriz $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ que satisfaça as seguintes condições:

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 0.$$

a) Indique os valores próprios de A . Indique qual é o seu polinómio característico. Justifique.

b) Determine o $\text{tr } A$, onde tr denota o traço de uma matriz. Determine $|A|$.

c) Determine todos os $\lambda \in \mathbb{R}$ para os quais a matriz $A - \lambda I_3$ é singular.

d) Determine, caso exista, uma matriz diagonal D semelhante a A (isto é, tal que $S^{-1}AS = D$). Justifique.

e) Encontre uma matriz A nas condições dadas. Justifique.

PROBLEMAS TEÓRICOS

Demonstre as afirmações

13. Seja $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ uma matriz arbitrária.

a) Mostre que $A - A^T$ é da forma
$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$
, com $a, b, c \in \mathbb{R}$.

b) Mostre que $\det(A - A^T) = 0$.

14. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz não singular. Mostre que:

a) $|\text{adj}(A)| \neq 0$.

b) $\text{adj}(A^{-1}) = (\text{adj}(A))^{-1}$.

FIM