$\boxed{604}$ - Actividade Formativa 2 - 2ª Parte

Escolha múltipla

Em cada questão apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respectivo.

1. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear. Então para todos $x, y, z \in \mathbb{R}$:

☐ **a)** $2T(x,y,z) = T(2x, 2y, 2z)$.

☐ **b)** $T^2(x,y,z) = T(x^2, y^2, z^2)$.

☐ **c)** $T(x-2, y-2, z-2) = T(x,y,z) - (2,2,2)$.

☐ **d)** $T(x,0,0) = xT(0,0,0)$.

2. Considere as transformações $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, por

$$f(x,y) = (1,x) \quad \text{e} \quad g(x,y) = (0, x+y)$$

Então:

☐ **a)** f é linear.

☐ **b)** g é injectiva.

☐ **c)** f é sobrejectiva.

☐ **d)** $g^2 = g$ onde $g^2 = g \circ g$.

3. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear, que com respeito às bases $\mathcal{B} = ((1,0,1), (0,1,0), (0,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}' = ((1,0), (-1,1))$ de $\mathbb{R}^2$, é representada pela matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Então para todos $x, y, z \in \mathbb{R}$:

☐ **a)** $T(x,y,z) = (2x+z, x-y+z)$.

☐ **b)** $T(x,y,z) = (x+z, -y+z)$.

☐ **c)** $T(x,y,z) = (x+y, -y+z)$.

☐ **d)** $T(x,y,z) = (x+y, x-y+z)$.

4. Considere a transformação, $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, que com respeito às bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ e de $\mathbb{R}^3$ é representado pela matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Considere as afirmações:

(i) $\ker T = \langle (-1,0,2,3) \rangle$.

(ii) T não é injectivo nem sobrejectivo.

(iii) $\operatorname{im} T = \langle (1,0,0), (0,2,0), (0,0,3) \rangle$.

Então:

☐ **a)** Nenhuma das afirmações é verdadeira.

☐ **b)** Apenas uma das afirmações é verdadeira.

☐ **c)** Apenas duas das afirmações são verdadeiras.

☐ **d)** Todas as afirmações são verdadeiras.

5. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear definido por

$$T(1,0,0) = (0,1) \quad , \quad T(1,1,0) = (2,1) \quad , \quad T(1,1,1) = (-1,0).$$

Então:

☐ **a)** $T(1,2,3) = (1,6)$.

☐ **b)** T é injectivo.

☐ **c)** $\{T(1,0,0), T(1,1,0)\}$ é base de T.

☐ **d)** T tem representação matricial $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$.

6. Para $a \in \mathbb{R}$, seja $f_a\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a aplicação linear que, com respeito às bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, é representada por $\begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$. Então tem-se sempre:

☐ **a)** Se $a = 0$, então $\dim(\ker f_a) = 2$.

☐ **b)** f_a é sobrejectiva, qualquer que seja a.

☐ **c)** f_a é injectiva , qualquer que seja a.

☐ **d)** Se $a = 1$, então $\ker f_a$ é representado, com respeito à base canónica de $\mathbb{R}^3$, por um sistema de Cramer.

7. Seja A uma matriz real de tipo 3×3 tal que $\operatorname{rank} A = 1$. Então tem-se sempre que:

☐ **a)** $0 \in \mathbb{R}$ é valor próprio de A com multiplicidade algébrica 1.

☐ **b)** $0 \in \mathbb{R}$ é valor próprio de A^2 com multiplicidade algébrica 2.

☐ **c)** $\dim E(0) = 1$.

☐ **d)** $\dim E(0) = 2$.

8. Seja $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ uma matriz com polinómio característico $p_A(x) = x^2(x-1)$. Então, tem-se sempre:

☐ **a)** $(0,0,0)$ é vector próprio de A.

☐ **b)** A é diagonalizável.

☐ **c)** A não é diagonalizável.

☐ **d)** O polinómio característico de A^T é $x^2(x-1)$.

Verdadeiro/Falso

Para mostrar que uma afirmação verdadeira tem de apresentar uma demonstração. Para mostrar que é falsa tem de apresentar um contra-exemplo.

9. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes:

a) A aplicação $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (2x + 1, x - y)$ é linear.

b) Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear satisfazendo $T(1, 0) = (1, 1, 0)$ e $T(1, 1) = (0, 1, 1)$. Então, relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{R}^3$, T tem representação matricial $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

c) Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear não sobrejectiva. Então 0 é valor próprio de T.

d) Seja $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ uma matriz tal que $|A| = 0$, $|A - I_4| = 0$, $|A + I_4| = 0$, $|A - 44I_4| = 0$. Então A é diagonalizável.

Problemas Práticos

Justifique todas as afirmações e apresente os cálculos realizados para as obter

10. Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja representação matricial relativamente à base canónica $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ na partida e à base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ na chegada, onde $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (1, 1, 0)$, $u_3 = (0, 1, 1)$, é dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Determine $\dim \operatorname{im} T$ e diga, justificando, se T é sobrejectiva.

b) Determine a expressão geral da transformação T.

c) Determine uma base para $\operatorname{im} T$.

d) Defina $\ker T$ e prove que $((1, -1, 1))$ é uma base de $\ker T$.

e) Justifique que 0 é valor próprio de T e determine o subespaço próprio $E(0)$.

f) Determine todos os valores próprios reais de T e os respectivos subespaços próprios. Diga, justificando, se T é diagonalizável.

11. Seja $f_\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o endomorfismo que com respeito à base canónica de $\mathbb{R}^3$, é representado pela matriz $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1-\alpha & 0 & -(\alpha+1) \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 1 & 0 & -(\alpha+1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

a) Determine os valores de α para os quais $b = (1, 0, 1) \in \operatorname{im} f_\alpha$.

b) Determine os valores de α para os quais f_α é sobrejectivo.

c) Determine $\dim \ker f_\alpha$, para cada α. Indique, caso existam, os α tais que f_α é injectivo.

d) Faça $\alpha = -1$ e faça $f = f_{-1}$, $A = A_{-1}$. Considere a base $\beta' = ((1,0,1),(0,1,1),(1,1,0))$ de $\mathbb{R}^3$. Determine:

- **$\mathbf{d_1}$)** A expressão geral de f.
- **$\mathbf{d_2}$)** $f(1,0,0)$ e $f(-1,0,2)$ na base $\mathcal{B}'$.
- **$\mathbf{d_3}$)** Uma base para $\ker f$.
- **$\mathbf{d_4}$)** $f^{-1}(\{(1,0,1)\})$ e $f^{-1}(\{(-2,0,-1)\})$.
- **$\mathbf{d_5}$)** A matriz B que representa f relativamente à base β' de $\mathbb{R}^3$, na partida e na chegada, isto é $B = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)$.

12. Considere o endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que, com respeito à base canónica de $\mathbb{R}^3$, é representado pela matriz real $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

a) Verifique que $(0,1,1)$ e $(-9,4,1)$ são vectores próprios de A.

b) Determine o polinómio característico de A.

c) Determine os subespaços próprios de A e diga se A é diagonalizável.

d) Calcule A^2, A^3 e A^7.

e) Considere a base $\mathcal{B}' = ((1,0,0),\ (1,1,1),\ (1,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$ e seja $\mathcal{B}$ a base canónica.

- **$\mathbf{e}_1$)** Seja $S = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$. Determine S^{-1}.
- **$\mathbf{e}_2$)** Determine a matriz B que representa f relativamente à base $\mathcal{B}'$ na partida e à base canónica na chegada, isto é $B = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$.
- **$\mathbf{e}_3$)** Determine a matriz C que representa f relativamente à base canónica na partida e à base $\mathcal{B}'$ na chegada, isto é $C = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.
- **$\mathbf{e}_4$)** Determine a matriz M que representa f relativamente à base $\mathcal{B}'$ (na partida e na chegada), isto é $M = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)$.

Problemas Teóricos

Demonstre as afirmações

13. Sejam U e V dois espaços vectoriais de dimensão finita e seja $T\colon U \to V$ uma aplicação linear. Seja $\{u_1,\dots,u_n\}$ um conjunto linearmente independentes de U. Mostre que:

a) Se T é injectiva, então $\{T(u_1),\dots,T(u_n)\}$ é um conjunto com n vectores linearmente independentes de V.

b) Se $\dim U = \dim V$, então T é injectiva se e só se T é sobrejectiva.

14. Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ duas matrizes semelhantes, $\lambda \in \mathbb{R}$, $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $X \neq 0$. Mostre que:

a) λ é valor próprio de A se e só se λ é valor próprio de B.

b) X é vector próprio de $B = P^{-1}AP$ associado a λ se e só se PX é vector próprio de A associado a λ.

FIM