

Relatório da Actividade Formativa 1 - 1ª Parte

ESCOLHA MÚLTIPLA

Grelha de Correção

1. - c) 2. - c) 3. - a) 4. - a) 5. - a) 6. - d) 7. - b) 8. - c)

Justificação

1. A afirmação c) é verdadeira, por definição de multiplicação de matrizes. As restantes afirmações são falsas:

- $2A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 4 & 14 & 2 \end{bmatrix}$.
- A e B são ambas matrizes de tipo 2×3 , pelo que é impossível multiplicá-las.
- A e C são matrizes de tipo diferente, pelo que é impossível somá-las.

2. Temos que

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 6 \\ 0 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}, \quad 6A = \begin{bmatrix} -18 & 0 & -6 \\ 0 & -18 & -12 \\ 0 & 0 & -18 \end{bmatrix},$$

pelo que $A^2 + 6A + 9I_3 = 0$. Portanto a afirmação c) é verdadeira. Poderá verificar, facilmente, que as restantes alíneas são falsas.

3. Temos que $A^2 = I_2$, donde $A^{99} = A$ e, portanto, a afirmação a) é verdadeira. As restantes afirmações são falsas uma vez que:

$$AB = \begin{bmatrix} 1+i & -1 \\ -i & 1-i \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 1-i & i \\ 1 & 1+i \end{bmatrix}, \quad (BA)^* = \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ -i & 1-i \end{bmatrix}, \quad B^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2i \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Temos que

$$A^T X = 0 \iff (A^T X)^T = 0 \iff X^T (A^T)^T = 0 \iff X^T A = 0 \implies X^T AB = 0,$$

donde afirmação a) é verdadeira. As restantes são falsas:

- Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ provam a falsidade de b).
- Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, provam a falsidade de c).
- Por exemplo, $A = I_2$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, provam a falsidade de d).

5. Como temos um sistema com 2 equações a 3 incógnitas e $x = 0$, $y = 0$, então não há restrições para a terceira incógnita que pode tomar qualquer valor real. Segue-se que a única afirmação verdadeira é a a).

6.

- Temos que

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & \beta \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -7 \\ \gamma \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha + 2 \\ -1 \\ -4 + 3\beta \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -7 \\ \gamma \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ - \\ - \\ \beta = -1 \\ \gamma = 4 \end{cases}$$

e, portanto, $(1, 2, 3)$ é solução do sistema dado para $\alpha = -2, \beta = -1, \gamma = 4$.

-

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & \beta \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{troca de linhas}} \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ -4 & 0 & \beta \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4 - 2L_3} \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ -4 & 0 & \beta \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

donde $\text{rank } A = 3 = \text{número de incógnitas}$, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Segue-se que o sistema homogêneo associado, $Ax = 0$, nunca é indeterminado.

- O sistema é impossível se e só se $\text{rank } A < \text{rank}[A|b]$. Ora

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & 2 & \gamma \end{array} \right] \xrightarrow{\text{troca de linhas}} \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & \gamma \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[\begin{smallmatrix} L_3 + 2L_2 \\ L_4 + L_2 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} L_3 + 2L_2 \\ L_4 + L_2 \end{smallmatrix}} \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & \gamma \end{array} \right] \xrightarrow{L_4 - 2L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma + 2 \end{array} \right].$$

Para $\gamma \neq -2$ temos $\text{rank } A = 3 < 4 = \text{rank}[A|b]$, pelo que o sistema é impossível.

Portanto as afirmações (i) e (iii) são verdadeiras e a (ii) é falsa. Segue-se que a resposta verdadeira é a c).

7. Sendo $B \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$ então $B^T \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$. Logo a) é falsa. É claro, por definição de matriz transposta, que a afirmação b) é verdadeira. As afirmações c) e d) são falsas porque B não é quadrada, logo nunca poderá ter inversa.

8. Temos que

$$BA^{-1}x = b \iff (BA^{-1})^{-1}BA^{-1}x = (BA^{-1})^{-1}b \iff x = AB^{-1}b,$$

$$A^T x = b \iff (A^T x)^T = b^T \iff x^T A = b^T,$$

o que prova que as afirmações (i) e (ii) são verdadeiras. A afirmação (iii) é falsa, pois para $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ temos que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e que

$$Ax = b \iff \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases}, \quad A^{-1}x = b \iff \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases} \quad (\text{verifique!})$$

que não são sistemas equivalentes. Portanto a afirmação c) é a verdadeira.

VERDADEIRO/FALSO

9. a) Temos que

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 14 & 14 \\ 14 & 14 & 14 \\ 14 & 14 & 14 \end{bmatrix} = 14 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

o que prova que a afirmação é verdadeira.

b) Suponhamos que $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Então $A^T = (a_{ji})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ e temos que

$$A + A^T = 0 \implies a_{ii} + a_{ii} = 0, \forall i \iff 2a_{ii} = 0, \forall i \iff a_{ii} = 0, \forall i$$

- quer dizer que os elementos da diagonal principal de A são todos iguais a zero. Portanto a afirmação é verdadeira.

c) Se A não fosse singular existiria A^{-1} e teríamos

$$A^2 = 0 \iff A \cdot A = 0 \iff A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A \cdot A = 0 \iff I_n = 0$$

o que é absurdo. Portanto A é singular. No entanto, a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ é tal que $A^2 = 0$ (confirme!) e temos que $\text{rank } A = 1 \neq 0$. Portanto,

$$A^2 = 0 \Rightarrow A \text{ singular} \quad \text{mas} \quad A^2 = 0 \not\Rightarrow \text{rank } A = 0.$$

Segue-se que a afirmação é falsa.

d) Temos que $A = PB$ onde $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz invertível, pois $\text{rank } P = 3$,

e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz com característica 3 (porque está em forma de escada).

Logo, A tem característica 3.

Efectuando cálculos chegaríamos à mesma conclusão:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

PROBLEMAS PRÁTICOS

10. a) É claro que o sistema (I) e o sistema (II) são equivalentes. De facto, basta substituir em (I) as variáveis x_1, x_2, x_3, x_4 por a, b, c, d respectivamente e passar os termos independentes para o 1º membro das equações. Portanto $S_1 = S_2$. Por outro lado, o sistema (III) é um subsistema do sistema (II), no sentido de que as suas equações são equivalentes a duas de (I). Logo toda a solução de (I) é solução de (III). Portanto $S_1 \subseteq S_3$.

b) Sabemos que um sistema é possível se e só se o seu conjunto de soluções é um conjunto não vazio. Além disso, como em qualquer dos sistemas o número de incógnitas é maior do que o número de equações, qualquer destes sistemas se for possível será indeterminado. Como $S_1 = S_2$ então (I) e (II) são da mesma natureza, quer dizer que (I) é possível se e só se (II) for possível. Como $S_1 \subseteq S_3$ então se (I) for possível também (III) será possível. Por outro lado, se (III) for impossível também (I) será impossível.

c) Começemos por escrever (I) na forma matricial:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -4 & 1 \end{array} \right].$$

Vamos efectuar transformações elementares sobre as linhas de modo a transformar a matriz acima numa forma escalonada.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -4 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3+L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -4 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3-2L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

A última matriz obtida é a matriz ampliada do sistema: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

Este sistema é equivalente ao seguinte

$$(III) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 1 \\ x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 - 4x_4 \\ x_2 = 1 - 3x_3 + 2x_4 \end{cases}.$$

Portanto

$$S_2 = S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 1} : \begin{cases} x_1 = -1 - 4x_4 \\ x_2 = 1 - 3x_3 + 2x_4 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 - 4x_4 \\ 1 - 3x_3 + 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

O sistema (III), como acabámos de ver, é equivalente ao sistema (I), pelo que $S_3 = S_2 = S_1$.

d) A matriz A é invertível como veremos. Para determinar A^{-1} recorreremos ao processo:

$$[A | I_3] \xrightarrow[\text{sobre as linhas}]{\text{transf. elementares}} [I_3 | A^{-1}].$$

$$\begin{aligned} [A | I_3] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3-2L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -11 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{L_3-2L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[L_1-6L_3]{L_2-3L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 13 & -24 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -11 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{L_1-2L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -11 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & 1 \end{array} \right] = [I_3 | A^{-1}]. \end{aligned}$$

Segue-se que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 6 & -11 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ e, portanto,

$$Ax = b \Leftrightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Leftrightarrow I_3x = A^{-1}b \Leftrightarrow x = A^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 6 & -11 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

11. a) Temos que

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 12 & -2 \\ 0 & 4 & 8 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2+2L_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 4 & 8 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}L_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3-4L_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como o número de pivots obtidos no final da condensação é 2 (a saber: -1 e 1), a característica de A é 2.

b) Atendendo à alínea a) podemos afirmar que

$$Ax = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ora

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_3 + 4x_4 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

e, portanto, o conjunto de soluções de $Ax = 0$ é

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} -3x_3 + 4x_4 \\ -2x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

c₁) Como $\text{rank } A = 2$, e atendendo aos cálculos efectuados na alínea a), então:

$Ax = b$ é possível $\Leftrightarrow \text{rank}[A|b] = \text{rank } A = 2$

$$\Leftrightarrow [A|b] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 & 4 & | & b_1 \\ 2 & 3 & 12 & -2 & | & b_2 \\ 0 & 4 & 8 & 8 & | & b_3 \end{bmatrix} \text{ equivalente } \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 & 4 & | & b'_1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & | & b'_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz $b' = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ é obtida da matriz $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, dos termos independentes, efectuando exactamente as mesmas transformações elementares que efectuámos em A na alínea a):

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2+2L_1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 + 2b_1 \\ b_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}L_2} \begin{bmatrix} b_1 \\ \frac{1}{3}(b_2 + 2b_1) \\ b_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3-4L_2} \begin{bmatrix} b_1 \\ \frac{1}{3}(b_2 + 2b_1) \\ b_3 - \frac{4}{3}(b_2 + 2b_1) \end{bmatrix}.$$

Portanto terá de ser $b_3 - \frac{4}{3}(b_2 + 2b_1) = 0$ ou, equivalentemente, $b_3 = \frac{4}{3}(b_2 + 2b_1)$.

c₂) Como $1 \neq \frac{4}{3}(1+2)$, então o sistema $Ax = (1, 1, 1)$ é impossível. Por outro lado, $4 = \frac{4}{3}(3+0)$, logo o sistema $Ax = (0, 3, 4)$ é possível e indeterminado com grau de indeterminação igual a: nº de colunas - rank $A = 4 - 2 = 2$.

c₃) Se y e w são soluções de $Ax = b$ então temos $Ay = b$ e $Aw = b$. Deste modo, usando as propriedades distributivas e de multiplicação de uma matriz por um escalar,

$$\begin{aligned} A(\alpha y + (1 - \alpha)w) &= A(\alpha y) + A((1 - \alpha)w) = \alpha(Ay) + (1 - \alpha)Aw \\ &= \alpha b + (1 - \alpha)b = \alpha b + b - \alpha b = b. \end{aligned}$$

Segue-se que $\alpha y + (1 - \alpha)w$ também é solução de $Ax = b$, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$.

12. a) A matriz ampliada do sistema $S_{\alpha, \beta}$ é $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2\alpha & -1 & 1 \\ 4 & 3\alpha + 1 & \beta - 2 & 1 \\ -2 & -2 & \alpha - 2\beta + 1 & 1 - \alpha\beta \end{array} \right]$. Vamos efectuar transformações elementares sobre as linhas de modo a transformar a matriz acima numa forma escalonada.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2\alpha & -1 & 1 \\ 4 & 3\alpha + 1 & \beta - 2 & 1 \\ -2 & -2 & \alpha - 2\beta + 1 & 1 - \alpha\beta \end{array} \right] &\xrightarrow[L_3+L_1]{L_2-2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2\alpha & -1 & 1 \\ 0 & -\alpha + 1 & \beta & -1 \\ 0 & 2\alpha - 2 & \alpha - 2\beta & 2 - \alpha\beta \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{L_3+2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2\alpha & -1 & 1 \\ 0 & -\alpha + 1 & \beta & -1 \\ 0 & 0 & \alpha & -\alpha\beta \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Agora, temos vários casos a considerar:

- Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$ a matriz simples do sistema $S_{\alpha, \beta}$ terá característica 3 e, por conseguinte, $S_{\alpha, \beta}$ será possível e determinado (qualquer que seja o valor de β).
- Se $\alpha = 0$, então a matriz acima será

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \beta & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Neste caso, as matrizes simples e ampliada de $S_{0, \beta}$ têm característica 2 (qualquer que seja o valor de β), pelo que, para qualquer valor de β , o sistema $S_{0, \beta}$ é possível e indeterminado, com grau de indeterminação $1 = 3 - 2$.

- Se $\alpha = 1$, então a matriz acima será

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \beta & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\beta \end{array} \right].$$

Trocando as duas últimas linhas e efectuando a transformação elementar $L_3 - \beta L_2$ obtemos a matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & \beta^2 - 1 \end{array} \right].$$

Assim, a matriz simples de $S_{1, \beta}$ tem característica 2 (qualquer que seja o valor de β), enquanto que a matriz ampliada tem característica 3, se $\beta^2 - 1 \neq 0$, e característica 2, se $\beta^2 - 1 = 0$. Deste modo, para $\beta \neq \pm 1$ o sistema $S_{1, \beta}$ é impossível, enquanto que, para $\beta = 1$ ou $\beta = -1$, $S_{1, \beta}$ é um sistema possível e indeterminado com grau de indeterminação 1.

Em resumo, podemos construir o seguinte quadro, onde indicamos a natureza do sistema $S_{\alpha,\beta}$ para os vários casos de α e de β :

Possível		Impossível
Determinado	Indeterminado	$\alpha = 1$ e $\beta \neq \pm 1$
$\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$ e $\forall \beta$	$\alpha = 0$ e $\forall \beta$ ou $\alpha = 1$ e ($\beta = 1$ ou $\beta = -1$)	

b) Começemos por notar que o sistema dado é o sistema homogéneo associado ao sistema $S_{1,0}$. Embora, como vimos na alínea a), o sistema $S_{1,0}$ seja impossível, um sistema homogéneo é sempre possível (porque 0 é sempre solução). Também vimos em a) que, a matriz simples

deste sistema é equivalente a $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Logo o sistema dado é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} 2x + 2y - z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}.$$

Segue-se que o conjunto de soluções do sistema dado é:

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1} : x = -y \text{ e } z = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{bmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\}.$$

c) Seja A a matriz simples do sistema $S = S_{0,1}$. Então $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

c₁) Temos que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3+L_1]{L_2-2L_1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3+2L_2} \begin{bmatrix} \boxed{2} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

[Note que os elementos não-nulos da diagonal principal de U são os **pivots** de A .]

Agora consideremos as seguintes matrizes elementares que estão associadas às operações elementares que efectuámos em A para obter U :

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

associadas às transformações elementares $L_2 - 2L_1$, $L_3 + L_1$, $L_3 + 2L_2$, respectivamente. Neste caso os multiplicadores são: -2, 1, 2 e temos que

$$(E_{32}E_{31}E_{21})A = U.$$

Deste modo

$$L = (E_{32}E_{31}E_{21})^{-1} = E_{21}^{-1}E_{31}^{-1}E_{32}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{2} & \boxed{1} & 0 \\ -1 & -2 & \boxed{1} \end{bmatrix}.$$

[Note que os elementos da diagonal principal de L são sempre **1** e que os elementos abaixo da diagonal são os **multiplicadores**: na posição (i, j) está k tal que $L_i - kL_j$.]

Confirmação: $LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} = A.$

c₂) Sabemos que se $A = LU$ então

$$Ax = b \iff LUX = b \iff \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases},$$

onde b é a matriz dos termos independentes de S . Estes dois sistemas são mais fáceis de resolver que o inicial uma vez que L e U são matrizes triangulares. As soluções x do segundo

sistema são exactamente as soluções do sistema pretendido. Ora neste caso $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Assim}$$

$$Ly = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} y_1 = 1 \\ 2y_1 + y_2 = 1 \\ -y_1 - 2y_2 + y_3 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -1 \\ y_3 = 0 \end{cases}.$$

Agora

$$Ux = y \iff \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 2x_1 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \frac{1+x_3}{2} \\ x_2 = -1 - x_3 \end{cases}.$$

Designando por \mathcal{S} o conjunto das soluções do sistema S , então

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1+x_3}{2} \\ -1 - x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

c₃) As soluções de S obtêm-se atribuindo valores a x_3 . Por exemplo, fazendo $x_3 = 0$ obtemos $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e fazendo $x_3 = 1$ obtemos $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

PROBLEMAS TEÓRICOS

13. a) Suponhamos que $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$. Então

$$AB = \begin{bmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} a_1b_1 + a_3b_2 & a_2b_1 + a_4b_2 \\ a_1b_3 + a_3b_4 & a_2b_3 + a_4b_4 \end{bmatrix}$$

donde $\text{tr}(AB - BA) = (a_2b_3 - a_3b_2) + (a_3b_2 - a_2b_3) = 0$.

b) Atendendo às hipóteses

$$A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} A \iff \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \\ \iff \begin{bmatrix} -a_2 & a_1 \\ -a_4 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 & a_4 \\ -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} a_4 = a_1 \\ a_3 = -a_2 \end{cases} .$$

Analogamente $B \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} B \iff \begin{cases} b_4 = b_1 \\ b_3 = -b_2 \end{cases}$. Segue-se que

$$AB = \begin{bmatrix} a_1b_1 - a_2b_2 & a_1b_2 + a_2b_1 \\ -a_2b_1 - a_1b_2 & -a_2b_2 + a_1b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 - a_2b_2 & a_2b_1 + a_1b_2 \\ -a_1b_2 - a_2b_1 & -a_2b_2 + a_1b_1 \end{bmatrix} = BA.$$

14. a) Como $A \neq 0$ então $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, donde $a^2 + b^2 \neq 0$. Assim

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \iff \begin{cases} ax - by = 0 \\ bx + ay = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2x - aby = 0 \\ b^2x + bay = 0 \\ bax - b^2y = 0 \\ abx + a^2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a^2 + b^2)x = 0 \\ (a^2 + b^2)y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} ,$$

donde $AX = 0$ é (possível e) determinado.

b) Como $AX = 0$ é determinado, então $\text{rank } A = 2$ e, portanto, A é invertível. Agora

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix}$$

e, portanto, $A \left(\frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \right) = I_2$, o que prova que $A^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$.

FIM