

# Relatório da Actividade Formativa 1 - 2ª Parte

## ESCOLHA MÚLTIPLA

### Grelha de Correção

1. - a)    2. - b)    3. - b)    4. - a)    5. - c)    6. - d)    7. - c)    8. - d)

### Justificação

1. A afirmação a) é verdadeira:

$$\begin{vmatrix} 2a+c & 2b+d \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & 2b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & d \\ c & d \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + 0.$$

As restantes afirmações são falsas, em geral. Com efeito:

- $\begin{vmatrix} a+1 & b+1 \\ c+1 & d+1 \end{vmatrix} = (a+1)(d+1) - (b+1)(c+1) \neq ad - bc + 1 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + 1$ , por exemplo para  $a = 1, b = 0, c = 0, d = 1$ .
- $\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{vmatrix} = 2a \cdot 2d - 2b \cdot 2c = 4(ad - bc) \neq 2(ad - bc) = 2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ , por exemplo para  $a = 1, b = 1, c = 0, d = 1$ .
- $\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2 \neq -a^2 = \begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{vmatrix}$ , para  $a \neq 0$ .

2. Temos que

$$I_n = 3A + A^2 = A(3I_n + A) \Rightarrow 1 = |I_n| = |A||3I_n + A| \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow A \text{ é invertível.}$$

Logo d) é falsa. Além disso,  $I_n = A(3I_n + A)$  implica que  $A^{-1} = 3I_n + A$  e b) é verdadeira.

- A afirmação c) é falsa, porque não podemos somar um número (que pode ser considerado uma matriz  $1 \times 1$ ) com uma matriz  $n \times n$ ,  $n \geq 2$  (não são do mesmo tipo).
- Por exemplo,  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$  é tal que

$$I_2 = 3A + A^2, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad |A| = -1 \quad (\text{verifique!}).$$

Logo  $A^{-1} \neq \frac{1}{|A|}A$ , o que mostra que a) é falsa.

3. Temos que

$$A \text{ é não singular} \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow |A||A| \neq 0 \Leftrightarrow |A^T||A| \neq 0 \Leftrightarrow |A^T A| \neq 0.$$

Portanto (i) é verdadeira. As afirmações (ii) e (iii) são falsas: por exemplo,  $A = I_2$  e  $\lambda = 2$  provam a sua falsidade (verifique!). Portanto b) é a afirmação verdadeira.

4. Temos que

$$\begin{aligned}
 |A_k| &= \begin{vmatrix} 2 & k & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & k \end{vmatrix} \stackrel{L_1-L_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & k-1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & k \end{vmatrix} \stackrel{\text{Laplace}}{=} (k-1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{\text{Laplace}}{=} -(k-1) \cdot 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & k \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & k \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Portanto a afirmação a) é verdadeira. As restantes são falsas, uma vez que

$$|A_k| = \begin{vmatrix} 2 & k \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & k \end{vmatrix} = -4(k-1)^2 \quad (\text{verifique!}).$$

5. Temos que

$$AB = (B + I_3)B = B^2 + B = B(B + I_3) = BA$$

e, portanto, a afirmação c) é verdadeira. As restantes são falsas:

- Por exemplo,  $B = I_3$  prova a falsidade de a). Confirme!
- Por exemplo, se  $B$  é a matriz nula então  $A - I_3 = B = 0$  que é uma matriz singular, portanto não invertível.
- Por exemplo, se  $B$  é a matriz nula,  $A = I_3$  e  $\text{rank } A = 3 \neq 0 = \text{rank } B$ .

6. Temos que

$$\det(AE) = \det(A) \det(E) = \det(A^T) \cdot (-1) = -\det(A^T).$$

Portanto a afirmação d) é verdadeira. As restantes afirmações são falsas:

- Para  $A = I_3$  temos  $AE = E$ , donde  $\text{tr}(AE) = 1 \neq 3 = \text{tr}(A)$ . Portanto a) é falsa.
- Ora  $AE$  é a matriz que se obtém de  $A$  trocando a segunda linha com a terceira linha. Para que fossem semelhantes ter-se-ia que fazer igual transformação nas colunas de  $A$ . De facto,  $E^{-1}AE$  é semelhante a  $A$ , enquanto que  $AE$  é equivalente a  $A$ . Portanto b) é falsa.
- Se  $A = 0$  então  $AE = 0$ , donde  $\text{rank}(AE) = 0 \neq 3$ . Portanto c) é falsa.

7. Como  $A$  é uma matriz singular, então  $|A| = 0$  e, portanto, 0 é valor próprio de  $A$ . Mais, sendo  $v$  e  $w$  dois vectores não-nulos e tais que  $Av = v$ ,  $Aw = 2w$ , então 1 e 2 são valores próprios de  $A$ . Portanto a afirmação (i) é verdadeira. Também (iii) é verdadeira, pois

$$Av = v \implies A(2v) = 2(Av) = 2v \implies 2v \text{ é vector próprio de } A$$

(pois  $2v \neq 0$ ). A afirmação (ii) é falsa:

$$A(v + w) = Av + Aw = v + 2w \neq v + w \quad (\text{porque } w \neq 0).$$

Portanto, apenas duas das afirmações são verdadeiras, e c) é verdadeira.

8. A afirmação d) é verdadeira. De facto, por hipótese  $B = PA$  para alguma matriz invertível  $P$  e  $A$  também é invertível ( $|A| = 2 \neq 0$ ). Assim,

$$\text{adj } B = \text{adj}(PA) = |PA|(PA)^{-1} = |P||A|A^{-1}P^{-1} \stackrel{|P| \in \mathbb{R}}{=} |A|A^{-1}|P|P^{-1} = \text{adj } A \text{ adj } P$$

e podemos escolher  $C = \text{adj } P$  que é invertível porque  $P$  é invertível.

As afirmações a), b) e c) são falsas. Com efeito, se  $B$  é obtida de  $A$  por transformações elementares nas linhas, então  $A$  e  $B$  são equivalentes, mas não necessariamente semelhantes. Recorde que:

- Duas matrizes  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  dizem-se *equivalentes* se existem duas matrizes  $P, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertíveis tais que  $B = QAP$ .
- Duas matrizes  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  dizem-se *semelhantes* se existe uma matriz  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertível tal que  $B = P^{-1}AP$ .

Note que matrizes semelhantes são equivalentes, mas o recíproco é falso. Mais, matrizes semelhantes têm o igual polinómio característico (ver Proposição 2.7.19), mas existem matrizes equivalentes com polinómios característicos distintos. De facto,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\text{equivalente}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B$$

e  $p_B(x) = |B - xI_3| = (1 - x)^2(2 + x) \neq |A - xI_3| = p(x)$ . Portanto a) e b) são falsas. Facilmente pode confirmar que c) também é falsa.

## VERDADEIRO/FALSO

9. a) Temos que

$$\begin{aligned} |A_k| &= \begin{vmatrix} 0 & 1-k & k-1 \\ 1-k & 1-k^2 & k-1 \\ k-1 & 0 & 1-k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-k & -(1-k) \\ 1-k & (1-k)(1+k) & -(1-k) \\ -(1-k) & 0 & 1-k \end{vmatrix} \\ &= (1-k) \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1-k & (1-k)(1+k) & -(1-k) \\ -(1-k) & 0 & 1-k \end{vmatrix} = (1-k)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1+k & -1 \\ -(1-k) & 0 & 1-k \end{vmatrix} \\ &= (1-k)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1+k & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto a afirmação é verdadeira.

b) Temos que

$$|A_k| \underset{\substack{\text{Laplace} \\ 1^{\text{a}} \text{ linha}}}{=} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -k \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & k \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -k \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & k \end{vmatrix} = 2(-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -k \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ k & 1 & -k \end{vmatrix}.$$

Portanto a afirmação é verdadeira.

c) A afirmação é falsa. Com efeito, se  $\text{rank } A = n - 1 < n$  então  $A$  não é invertível. Logo  $|A| = 0$  e, portanto,  $0$  é valor próprio de  $A$ .

d) Temos que  $u$  é vector próprio de  $A$  se e só se existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $Au = \lambda u$ :

$$\begin{aligned} Au = \lambda u &\iff \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} -2 - \alpha \\ 2 + \alpha \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda \\ \lambda \\ \lambda\alpha \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{cases} \lambda = 2 + \alpha \\ \lambda\alpha = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} - \\ (2 + \alpha)\alpha = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} - \\ \alpha = 1 \vee \alpha = -3 \end{cases} . \end{aligned}$$

Por outro lado,  $u, v, w$  constituem as colunas de uma matriz  $B$  não singular se e só se  $|B| \neq 0$ :

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha & -1 \\ \alpha & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\alpha^3 + 2\alpha - 1. \quad (\text{Confirme!})$$

Substituindo  $\alpha$  por  $1$  obtemos  $-1 + 2 - 1 = 0$ , enquanto que para  $\alpha = -3$  obtemos  $27 - 6 - 1 = 20 \neq 0$ . Portanto  $\alpha = -3$  é tal que  $u$  é vector próprio de  $A$  (associado ao valor próprio  $\lambda = -1$ ) e a matriz  $B$  cujas colunas são os vectores  $u, v, w$  é não singular. Segue-se que a afirmação é verdadeira.

## PROBLEMAS PRÁTICOS

10. a) Vamos efectuar transformações elementares na matriz de forma a introduzir zeros e facilitar, depois, a aplicação do desenvolvimento de Laplace:

$$\begin{aligned} |A_k| &= \begin{vmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \stackrel{L_3 \leftrightarrow L_4}{=} \\ \stackrel{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} \\ \stackrel{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \stackrel{L_2 - kL_1}{=} \\ \stackrel{L_3 - L_1}{=} \\ \stackrel{L_4 - L_1}{=} \end{matrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & 1 - k & 1 - k & 1 - k^2 \\ 0 & k - 1 & 0 & 1 - k \\ 0 & 0 & k - 1 & 1 - k \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\text{Laplace}}{=} - \begin{vmatrix} 1 - k & 1 - k & 1 - k^2 \\ k - 1 & 0 & 1 - k \\ 0 & k - 1 & 1 - k \end{vmatrix} = -(1 - k)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 + k \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{L_1 + L_2}{=} -(1 - k)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 + k \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Laplace}}{=} -(1 - k)^3 (-1)^{2+1} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 + k \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -(1 - k)^3 (k + 3). \end{aligned}$$

Segue-se que:

$$A_k \text{ é não singular} \iff |A_k| \neq 0 \iff k \neq 1 \text{ e } k \neq -3.$$

b) Atendendo à alínea a), temos vários casos a considerar:

- Se  $k \neq 1$  e  $k \neq -3$  então  $A_k$  é não singular e, portanto,  $\text{rank } A_k = 4$ .

- Se  $k = 1$  então  $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  e  $\text{rank } A_1 = 1$ , uma vez que todas as linhas são linearmente dependentes da linha  $L_1$  (de facto  $L_1 = L_2 = L_3 = L_4$ ) e  $L_1 \neq (0, 0, 0, 0)$ .

- Se  $k = -3$  então  $A_{-3} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ . Podemos condensar a matriz para determinar a sua característica:

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[(*)]{\text{equivalente}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 4 & -8 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3+L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4+L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(\*) - efectuando as transformações  $\begin{cases} L_3 \leftrightarrow L_4 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_1 \leftrightarrow L_2 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} L_2 - 3L_1 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 - L_1 \end{cases}$  como na alínea a).

Logo  $\text{rank } A_{-3} = 3$ .

c) Temos que  $B_k = (A_k)_{41} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{bmatrix}$ .

**c<sub>1</sub>)** Para facilitar a escrita escreveremos apenas  $B$  em vez de  $B_k$ . Sabemos que sendo  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  então

$$(\text{adj } B)B = B(\text{adj } B) = (\det B)I_3.$$

Deste modo, comecemos por calcular  $\det B$ .

$$\begin{aligned} |B| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{L_2 - kL_1 \\ L_3 - L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 - k & 1 - k \\ 0 & k - 1 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k - 1 & 0 \\ 0 & 1 - k & 1 - k \end{vmatrix} \\ &\stackrel{L_3 + L_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - k \end{vmatrix} = -(k - 1)(1 - k) = (k - 1)^2. \end{aligned}$$

Assim  $C = \text{adj } B$  satisfaz a identidade pretendida. Assim

$$\begin{aligned} C = \text{adj } B &= (\text{cof } B)^T = [(-1)^{i+j} \det B_{ij}]_{3 \times 3}^T = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 1 - k & -(k - 1) & k^2 - 1 \\ -(1 - k) & 0 & -(k - 1) \\ 0 & -(1 - k) & 1 - k \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 - k & -(1 - k) & 0 \\ -(k - 1) & 0 & -(1 - k) \\ k^2 - 1 & -(k - 1) & 1 - k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**c<sub>2</sub>)** Façamos  $B_k = B$ . Ora  $B$  é invertível sse  $|B| \neq 0$ . Determinámos em  $c_1)$  que  $|B| = (k - 1)^2$  pelo que  $B$  é invertível sse  $k \neq 1$ . Novamente, pela alínea anterior, para

$k \neq 1$ ,

$$\begin{aligned} B^{-1} &= \frac{1}{|B|} \operatorname{adj} B = \frac{1}{(k-1)^2} \begin{bmatrix} 1-k & -(1-k) & 0 \\ -(k-1) & 0 & -(1-k) \\ k^2-1 & -(k-1) & 1-k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{k-1} & \frac{1}{k-1} & 0 \\ -\frac{1}{k-1} & 0 & \frac{1}{k-1} \\ \frac{k+1}{k-1} & -\frac{1}{k-1} & -\frac{1}{k-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**11. a)** É claro que  $A$  é invertível, uma vez que  $|A| = -1 \neq 0$ . Vamos determinar  $A^{-1}$  recorrendo ao processo

$$[A | I_3] \xrightarrow[\text{sobre as linhas}]{\text{transf. elementares}} [I_3 | A^{-1}].$$

Assim

$$\begin{aligned} [A | I_3] &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{L_2 - L_1} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 + L_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\substack{(-1)L_2 \\ (-1)L_3}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 - L_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] = [I_3 | A^{-1}]. \end{aligned}$$

Segue-se que  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ .

**b)** Temos que o polinómio característico de  $A$  é:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -1 - \lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\text{Laplace}}{=} \underset{\text{2ª coluna}}{(-1)^{1+2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} + (-1 - \lambda)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -(1 - \lambda - 1) - (1 + \lambda)(-\lambda(1 - \lambda) + 1) = -\lambda^3 + \lambda - 1. \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Cayley-Hamilton (Proposição 2.7.28) então

$$0 = p_A(A) = -A^3 + A - I_3 \iff -A^3 + A = I_3 \iff A(-A^2 + I_3) = I_3.$$

Segue-se que

$$A^{-1} = -A^2 + I_3 = - \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Confirme!)

c) Temos que

$$\text{adj } A^2 = (A^2)^{-1}|A^2| = (A^{-1})^2|A|^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^2 (-1)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, temos que

$$\text{adj}(2A) = (2A)^{-1}|2A| = \left(\frac{1}{2}A^{-1}\right)(2^3|A|) = -4A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Nota: Pode calcular  $\text{adj } A^2$  e  $\text{adj}(2A)$  directamente, pela definição de matriz adjunta, e verificar que obtém os mesmos resultados. No entanto, conhecendo  $A^{-1}$  este processo é mais eficiente.

d) Temos que  $\text{adj}(2A) = -4A^{-1}$ , donde  $(\frac{1}{2}A)\text{adj}(2A) = \frac{1}{2}A(-4A^{-1}) = -2I_3$ . Portanto

$$B = \frac{1}{2}A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

e<sub>1</sub>) Temos que

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4 - 3x_4 \\ x_1 + x_3 = 1 - x_4 \end{cases} \Leftrightarrow Ax = b$$

onde  $A$  é a matriz dada e  $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 - 3x_4 \\ 1 - x_4 \end{bmatrix}$ . Como  $A$  é invertível

$$Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 - 3x_4 \\ 1 - x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 - 3x_4 \\ -3 + 2x_4 \\ -6 + 2x_4 \end{bmatrix}.$$

e<sub>2</sub>) O sistema dado pode-se escrever matricialmente na forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

O determinante principal é, quando muito, de ordem 3 e poderá ser

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

se forem não nulos. Como  $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$  podemos tomar para determinante

principal  $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = |A|$  onde  $A$  é a matriz dada na alínea a). Não há equações

não-principais (pois todas as equações estão envolvidas no determinante principal), logo não há determinante característico. Portanto, pelo Teorema de Rouché (ver secção 2.7), podemos concluir que o sistema é possível. Como há 3 equações e 4 incógnitas há uma incógnita não-principal e o sistema é indeterminado. Como escolhemos para determinante principal o menor da sub matriz formada pelas 3 linhas e pelas primeiras 3 colunas da matriz simples do sistema, a incógnita  $x_4$  é considerada como incógnita não-principal, podendo tomar qualquer valor real. Assim, escrevendo o sistema dado na forma  $Ax = b$  com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 - 3x_4 \\ 1 - x_4 \end{bmatrix},$$

podemos aplicar a regra de Cramer obtendo:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 - 3x_4 & -1 & 1 \\ 1 - x_4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-7 + 3x_4}{-1} = 7 - 3x_4,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 - 3x_4 & 1 \\ 1 & 1 - x_4 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3 - 2x_4}{-1} = -3 + 2x_4,$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 - 3x_4 \\ 1 & 0 & 1 - x_4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{6 - 2x_4}{-1} = -6 + 2x_4.$$

**12. a)** Façamos  $u = (0, 1, 0)$ ,  $v = (0, 0, 1)$  e  $w = (1, 2, -1)$ . Então

$$Au = -2u, \quad Av = -v, \quad Aw = 0 = 0w.$$

Logo

$$\begin{aligned} u &= (0, 1, 0) \text{ é vector próprio associado ao valor próprio } \lambda_1 = -2 \\ v &= (0, 0, 1) \text{ é vector próprio associado ao valor próprio } \lambda_2 = -1 \\ u &= (1, 2, -1) \text{ é vector próprio associado ao valor próprio } \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

Segue-se que  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = -1$ ,  $\lambda_3 = 0$  são valores próprios de  $A$ . Como  $A$  é uma matriz do tipo  $3 \times 3$ , então  $-2$ ,  $-1$ ,  $0$  são todos os valores próprios de  $A$ . Portanto o polinómio característico de  $A$  é:

$$p_A(\lambda) = (-1)^3(\lambda - (-2))(\lambda - (-1))(\lambda - 0) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 2\lambda.$$

**b)** Temos que

$$\begin{aligned} \text{tr } A &= \text{soma dos valores próprios de } A = (-2) + (-1) + 0 = -3, \\ |A| &= \text{produto dos valores próprios de } A = (-2) \cdot (-1) \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

- veja as Proposições 2.7.20 e 2.7.26.

c) Temos que

$$A - \lambda I_3 \text{ é singular} \iff |A - \lambda I_3| = 0 \iff \lambda \text{ é valor próprio de } A \\ \iff \lambda = -2 \text{ ou } \lambda = -1 \text{ ou } \lambda = 0.$$

Deste modo,  $A + 2I_3$ ,  $A + I_3$ ,  $A$  são matrizes singulares (= não invertíveis). Para  $\lambda \neq -2$  e  $\lambda \neq -1$  e  $\lambda \neq 0$  a matriz  $A - \lambda I_3$  é não singular (= invertível).

d) Como  $A$  tem três valores próprios distintos  $A$  é diagonalizável. Logo existe uma matriz invertível  $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  e uma matriz diagonal  $D \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  tais que  $S^{-1}AS = D$ . Ora

$$A \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$\underbrace{\quad}_{\tilde{u}} \quad \underbrace{\quad}_{\tilde{v}} \quad \underbrace{\quad}_{\tilde{w}} \qquad \underbrace{\quad}_{-2u} \quad \underbrace{\quad}_{-1v} \quad \underbrace{\quad}_{0w} \qquad \underbrace{\quad}_{\tilde{u}} \quad \underbrace{\quad}_{\tilde{v}} \quad \underbrace{\quad}_{\tilde{w}} \qquad \underbrace{\quad}_{-2u} \quad \underbrace{\quad}_{-1v} \quad \underbrace{\quad}_{0w}$

donde considerando as matrizes

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \boxed{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\quad}_{\tilde{u}} \quad \underbrace{\quad}_{\tilde{v}} \quad \underbrace{\quad}_{\tilde{w}} \qquad \underbrace{\quad}_{\tilde{u}} \quad \underbrace{\quad}_{\tilde{v}} \quad \underbrace{\quad}_{\tilde{w}}$

obtemos  $AS = SD$  e, portanto,  $S^{-1}AS = D$ . As colunas de  $S$  são formadas pelos vectores próprios  $u, v, w$  de  $A$ , e os elementos da diagonal principal de  $D$  são os valores próprios respectivos.

Nota: A ordem com que consideramos as colunas de  $S$ , condiciona a disposição dos valores próprios na diagonal principal de  $D$ . De facto, se considerássemos antes os vectores próprios pela ordem  $w, u, v$  então:

$$S' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D' = \begin{bmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \end{bmatrix} \text{ e } S'^{-1}D'S' = A.$$

$\underbrace{\quad}_{\tilde{w}} \quad \underbrace{\quad}_{\tilde{u}} \quad \underbrace{\quad}_{\tilde{v}} \qquad \underbrace{\quad}_{\tilde{w}} \quad \underbrace{\quad}_{\tilde{u}} \quad \underbrace{\quad}_{\tilde{v}}$

e) Em primeiro lugar determinemos  $S^{-1}$ :

$$[S | I_3] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{troca de linhas}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[\substack{L_1 - 2L_3 \\ L_2 + L_3}]{\quad} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] = [I_3 | S^{-1}].$$

Segue-se que  $S^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Como  $S^{-1}AS = D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  então

$$A = I_3 A I_3 = (S S^{-1}) A (S S^{-1}) = S (S^{-1} A S) S^{-1} = S D S^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Nota:

1. Efectue contas análogas com as matrizes  $S'$ ,  $D'$  e  $S'^{-1}$  (determine!) e verifique que obtém a mesma matriz  $A$ .

2. Resolva as alíneas a) e b) directamente para a matriz  $A$  e verifique que obtém os resultados já obtidos.

### PROBLEMAS TEÓRICOS

**13. a)** Suponhamos  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Então  $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$  e temos que

$$A - A^T = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} - a_{21} & a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} & 0 & a_{23} - a_{32} \\ a_{31} - a_{13} & a_{32} - a_{23} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

onde  $a = a_{12} - a_{21}$ ,  $b = a_{13} - a_{31}$ ,  $c = a_{23} - a_{32} \in \mathbb{R}$ .

b) Temos que

$$\det(A - A^T) = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = abc - abc = 0.$$

**14. a)** Como  $A$  é não singular então  $|A| \neq 0$  e tem-se  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)$ . Logo  $\text{adj}(A) = |A|A^{-1}$ , donde

$$|\text{adj}(A)| = ||A|A^{-1}| \stackrel{(*)}{=} |A|^n |A^{-1}| = |A|^{n-1} |A| |A^{-1}| = |A|^{n-1} |I_n| = |A|^{n-1} \neq 0$$

(\*) note que  $A$  é uma matriz do tipo  $n \times n$  e que  $|A|$  é um escalar.

b) Por a) sabemos que  $\text{adj}(A)$  é invertível e  $A$ , também, é invertível. Deste modo,

$$\text{adj}(A^{-1}) = |A^{-1}|(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A|} A \quad , \quad \text{adj}(A) = |A|A^{-1}.$$

Segue-se que

$$\text{adj}(A^{-1}) \text{adj}(A) = \left( \frac{1}{|A|} A \right) (|A|A^{-1}) = \frac{1}{|A|} |A| (AA^{-1}) = I_n$$

e, portanto,  $\text{adj}(A^{-1}) = (\text{adj}(A))^{-1}$ .

**FIM**