Relatório da Actividade Formativa 2 - 1ª Parte

Escolha múltipla

Grelha de Correção

1. - a) **2.** - d) **3.** - b) **4.** - a) **5.** - c) **6.** - b) **7.** - d) **8.** - b)

Justificação

1. Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ então os vectores $(1,2),(2,1)$ são linearmente independentes e, portanto, $((1,2),(2,1))$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ - quaisquer dois vectores linearmente independentes de um espaço com dimensão 2 constitue uma base desse espaço. A afirmação a) é, pois, verdadeira. A Afirmação b) é falsa porque $(1,1,0) = (1,0,1) + (0,1,-1)$. As afirmações c) e d) são falsas porque tanto $\mathbb{R}^2$ como $\mathbb{R}^3$ são espaços vectoriais com um número infinito de vectores.

2. As afirmações a) e b) são falsas, porque qualquer subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, distinto do subespaço nulo, tem infinitos vectores. Por outro lado, sendo $\{u,v,w\}$ um conjunto de vectores linearmente independente então

$$t \in L(u,v,w) \iff \{u,v,w,t\} \text{ linearmente dependente}\,,$$

o que prova que c) é falsa e que d) é verdadeira.

3. Temos que

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & -4 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2-L_1 \\ L_3-3L_1}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -10 \end{bmatrix} \underset{L_3-2L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde u,v,w são linearmente dependentes. Na verdade, temos $w = u + 2v$. Portanto, a) e d) são afirmações falsas. Também c) é falsa

$$L(u) + L(v) + L(w) = L(u,v,w) \neq L(u+v+w) = L(5,-2,-5)$$

pois $u = (1,-1,2) \notin L(5,-2,-5)$. Por último,

$$u = 2(u+v) - (u+2v) = 2(u+v) - w \in L(u+v,w)\,,$$

$$v = -(u+v) + (u+2v) = -(u+v) + w \in L(u+v,w) \quad , \quad w \in L(u+v,w)\,,$$

$$u+v\,,\ w \in L(u,v,w).$$

Logo

$$L(u,v,w) \subseteq L(u+v,w) \subseteq L(u,v,w)$$

o que prova a veracidade de b).

4. Temos que

$$Ax = b \text{ possível} \iff \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A|b] \Leftrightarrow 2 = \operatorname{rank}[A|b] \iff b \in L(u,v),$$

uma vez que u e v são as colunas da matriz A. Portanto a afirmação a) é verdadeira. As restantes alíneas são falsas: seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

- Se $b = (1,0,0)$ então $\operatorname{rank} A = 1 \neq 2 = \operatorname{rank}[A|b]$ e o sistema $Ax = b$ é impossível. Portanto b) é falsa.
- Se $b = (1,-1,1)$ então $\operatorname{rank} A = 1 = \operatorname{rank}[A|b]$ e o sistema $Ax = b$ é possível. Portanto c) e d) são falsas.

5. A afirmação verdadeira é a c). De facto,

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + 2y = z\} = \{(x,y,x+2y) \colon x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,0,1) + y(0,1,2) \colon x,y \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,1),(0,1,2) \rangle\,, \\ G &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon y = z\} = \{(x,z,z) \colon x,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,0,0) + z(0,1,1) \colon x,z \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,0),(0,1,1) \rangle\,, \end{aligned}$$

$$F \cap G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + 2y = z\,,\ y = z\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x = -y\,,\ y = z\}\,.$$

Portanto, (i) e (iii) são afirmações verdadeiras e (ii) é falsa.

6. Temos que $(-1,1,0) \in F \cap G$, pois satisfaz a equação $x + y - z = 0$ e é um gerador de G. Por outro lado, $\dim G = 2$ pois é gerado por dois vectores que são linearmente independentes. Se $\dim(F \cap G) = 2$ então $F \cap G = G$, pois $F \cap G \subseteq G$. Mas $(1,1,1) \in G$ e $(1,1,1) \notin F$. Logo $F \cap G \neq G$. Segue-se que $\dim(F \cap G) \leq 1$. Como $(-1,1,0) \in F \cap G$ então $(-1,1,0)$ gera $F \cap G$. Quer dizer que $F \cap G = \{x(-1,1,0) \colon x \in \mathbb{R}\}$. Portanto a afirmação b) é verdadeira. Além disso, as afirmações a) e d) são falsas. Também c) é falsa porque $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, donde $(1,0,1) \notin G$.

7. (i) - Temos que $\operatorname{rank} A \leq 3 = \text{n}^{\text{o}}$ de linhas. Como $A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ é uma submatriz de A (formada pelas 3 primeiras colunas de A) e $|A'| = 4 \neq 0$ (confirme!) então $\operatorname{rank} A' = 3$ e, portanto, também $\operatorname{rank} A = 3$. Portanto a afirmação (i) é verdadeira.

(ii) - Como A tem característica 3, então 3 vectores de $\mathcal{R}(A)$ linearmente independentes constituem uma base do espaço coluna de A. Deste modo, a afirmação é verdadeira se:

$$\begin{cases} \bullet\ (1,0,-1),(2,3,0),(1,1,2) \in \mathcal{R}(A) \\ \bullet\ \{(1,0,-1),(2,3,0),(1,1,2)\} \text{ conj. linearmente independente} \end{cases}$$

• Ora $(1,0,-1)$, $(2,3,0)$ são as duas primeiras colunas de A e $(1,1,2) = (0,1,2) + (1,0,0)$ (soma das colunas C_3 e C_4 de A). Logo $(1,0,-1),(2,3,0),(1,1,2) \in \mathcal{R}(A)$.

• Temos que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$ (confirme!), donde os vectores são linearmente independentes. Portanto a afirmação (ii) é verdadeira.

(iii) - Por definição $\ker A = \{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = 0\}$. Ora

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

donde $(-6,1,-3,4) \in \ker A$. Por outro lado, $\operatorname{rank} A = 3$ donde $AX = 0$ é um sistema indeterminado com grau de indeterminação $1 = 4 - 3 = n^{\text{o}}$ de colunas de $A - \operatorname{rank} A$. Segue-se que $\dim \ker A = 1$. Logo qualquer vector não nulo pertencente a $\ker A$ gera $\ker A$. Em particular, $\ker A = \langle (-6,1,-3,4) \rangle$.

Alternativa: condensando a matriz A obtemos

$$Ax = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_2 + x_3 = 0 \\ \frac{4}{3}x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}x_4 \\ x_2 = \frac{1}{4}x_4 \\ x_3 = -\frac{3}{4}x_4 \end{cases}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \ker A &= \left\{ \left(-\frac{3}{2}x_4, \frac{1}{4}x_4, -\frac{3}{4}x_4, x_4 \right) : x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_4 \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, 1 \right) : x_4 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\langle \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, 1 \right) \right\rangle = \langle (-6, 1, -3, 4) \rangle. \end{aligned}$$

Segue-se que a afirmação (iii) é verdadeira. Portanto a d) é a afirmação verdadeira.

8. Temos que

$$2u + 3v = w = -5u + 2v \iff 7u + v = 0 \iff v = -7u.$$

Deste modo, $w = 2u + 3v = -19u$. Como $u \neq 0_V$, então $U = L(u, v, w) = L(u)$ tem dimensão 1. Segue-se que b) é a afirmação verdadeira.

Verdadeiro/Falso

9. a) A afirmação é falsa. De facto, com a adição assim definida não existe elemento neutro para adição. Supondo que $\mathbf{0} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ é o elemento neutro então, em particular, $(1, 0) + (a, b) = (1, 0)$ e $(2, 0) + (a, b) = (2, 0)$. Mas

$$\left. \begin{array}{l} (1,0) + (a,b) = (1,0) \iff (a,0) = (1,0) \iff a = 1 \\ (2,0) + (a,b) = (2,0) \iff (a,0) = (2,0) \iff a = 2 \end{array} \right\} \text{impossível.}$$

Deste modo, não existe um vector $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ tal que $\mathbf{0} + u = u + \mathbf{0} = u$ para qualquer $u \in \mathbb{R}^2$.

b) Temos que

$$(1,1,0,1) = \alpha(1,1,1,2) + \beta(0,1,0,1) + \gamma(0,0,1,1) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha + \beta = 1 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \\ \gamma = -1 \\ 1 = 1 \end{cases},$$

$$(2,0,1,1) = \alpha(1,1,1,2) + \beta(0,1,0,1) + \gamma(0,0,1,1) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 1 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -2 \\ \gamma = -1 \\ 1 = 1 \end{cases},$$

$$(1,2,0,2) = \alpha(1,1,1,2) + \beta(0,1,0,1) + \gamma(0,0,1,1) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha + \beta = 2 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = -1 \\ 2 = 2 \end{cases}.$$

Portanto $\langle (1,1,0,1), (2,0,1,1), (1,2,0,2) \rangle \subseteq \langle (1,1,1,2), (0,1,0,1), (0,0,1,1) \rangle$. Por outro lado,

$$\dim\langle(1,1,0,1),(2,0,1,1),(1,2,0,2)\rangle = \operatorname{rank}\begin{bmatrix}1&1&0&1\\2&0&1&1\\1&2&0&2\end{bmatrix} = 3 \text{ (Confirme!)}$$

$$\dim\langle(1,1,1,2),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\rangle = \operatorname{rank}\begin{bmatrix}1&1&1&2\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix} = 3 \text{ (matriz escalonada).}$$

Deste modo, $\langle(1,1,0,1),(2,0,1,1),(1,2,0,2)\rangle = \langle(1,1,1,2),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\rangle$ e a afirmação é verdadeira.

c) Temos que $F = \{(1-y,y,z)\colon y,z\in\mathbb{R}\}$ e $G = \{(-1-y,y,z)\colon y,z\in\mathbb{R}\}$, donde

$$F+G = \{(1-y-1-y,2y,2z)\colon y,z\in\mathbb{R}\} = \{(-2y,2y,2z)\colon y,z\in\mathbb{R}\} = \{(-a,a,b)\colon a,b\in\mathbb{R}\}.$$

Além disso, temos para quaisquer $u=(-a,a,b), v=(-a',a',b')\in F+G$ e qualquer $\alpha\in\mathbb{R}$ que

$$\begin{aligned}&(-a,a,b)+(-a',a',b') = (-(a+a'),a+a',b+b')\in F+G,\\ &\alpha(-a,a,b) = (-\alpha a,\alpha a,\alpha b)\in F+G,\end{aligned}$$

donde $F+G$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ e a afirmação é verdadeira.

d) A afirmação é verdadeira. De facto, $F+G$ é um subespaço de $\mathbb{R}^5$ e temos que

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G) = 5 = \dim\mathbb{R}^5.$$

Problemas Práticos

10. a) Consideremos a matriz A cujas linhas são os vectores a,b,c,d,e e determinemos a sua característica.

$$A = \begin{bmatrix}1&1&1&0&1\\1&-1&2&2&-7\\2&2&1&1&4\\2&2&3&-1&0\\1&1&6&-5&-9\end{bmatrix} \underset{\substack{L_2-L_1\\L_3-2L_1\\L_4-2L_1\\L_5-L_1}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix}1&1&1&0&1\\0&-2&1&2&-8\\0&0&-1&1&2\\0&0&1&-1&-2\\0&0&5&-5&-10\end{bmatrix} \underset{\substack{L_4+L_3\\L_5+5L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix}1&1&1&0&1\\0&-2&1&2&-8\\0&0&-1&1&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Como A tem característica 3 então o número máximo de vectores linearmente independentes do conjunto $\{a,b,c,d,e\}$ é 3. Por outro lado, temos imediatamente

$$A' = \begin{bmatrix}1&1&1&0&1\\1&-1&2&2&-7\\2&2&1&1&4\end{bmatrix} \text{ equivalente } \begin{bmatrix}1&1&1&0&1\\0&-2&1&2&-8\\0&0&-1&1&2\end{bmatrix}$$

que tem característica 3. Logo também A' tem característica 3 e, portanto, os vectores a, b, c são linearmente independentes.

Alternativa: Consideremos os vectores

$$u = (1,1,1,0,1)\,,\ v = (0,-2,1,2,-8)\,,\ w = (0,0,-1,1,2).$$

Estes vectores são linearmente independentes, pois estão em forma de escada. Ora $u = a$, $v = -a + b$ e $w = -2a + c$, pelo que a, b, c também são vectores linearmente independentes. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\alpha a + \beta b + \gamma c = 0 &\Longleftrightarrow \alpha a + (\beta a - \beta a) + \beta b + (2\gamma a - 2\gamma a) + \gamma c = 0 \\
&\Longleftrightarrow (\alpha + \beta + 2\gamma)a + \beta(-a + b) + \gamma(-2a + c) = 0 \\
&\Longleftrightarrow (\alpha + \beta + 2\gamma)u + \beta v + \gamma w = 0 \\
&\underset{\substack{\{u,v,w\} \\ \text{linear/} \\ \text{indep.}}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

b) $\mathcal{V}$ é subespaço vectorial de $\mathbb{R}^5$, pois é o conjunto de todas as combinações lineares dos vectores de $\mathbb{R}^5$: a, b, c, d, e. Na verdade, $\mathcal{V}$ é o subespaço gerado por estes vectores, isto é, $\mathcal{V} = L(\{a, b, c, d, e\}) = \langle a, b, c, d, e\rangle$.

c) Temos que $\dim \mathcal{V} = 3$, pois $\mathcal{V}$ é gerado pelo conjunto $\{a, b, c, d, e\}$ e o número máximo de vectores linearmente independentes deste conjunto é 3, como se observou na alínea a). Assim, quaisquer três vectores linearmente independentes de $\mathcal{V}$ geram $\mathcal{V}$. Como a, b, c, são linearmente independentes (observado em a)), então $\{a, b, c\}$ gera $\mathcal{V}$. Portanto, $\mathcal{V} = \langle a, b, c, d, e\rangle = \langle a, b, c\rangle$.

d) Como $\{a, b, c\}$ gera $\mathcal{V}$ e a, b, c são linearmente independentes então (a, b, c) é uma base de $\mathcal{V}$.

e) Sabemos, pela alínea a), que o conjunto $\{a, b, c, d\}$ é linearmente dependente. Logo, como $\{a, b, c, d\}$ é um subconjunto de $\{a, b, c, d, f\}$, também este último conjunto é linearmente dependente. Assim, (a, b, c, d, f) não é uma base de $\mathbb{R}^5$.

f) Com os subespaços F e G dados é impossível ilustrar a proposição. Com efeito, sabemos, pela alínea a), que os vectores d e e são dependentes dos vectores a, b, c (pois efectuando transformações elementares na matriz A as duas últimas linhas foram transformadas em linhas nulas), donde o subespaço $G = \langle d, e\rangle$ está contido no subespaço $F = \langle a, b, c\rangle$. Portanto $F \cup G = F$ é um subespaço de $\mathbb{R}^5$.

Nota: Pode verificar que $d = 4a - c$ e que $e = 11a - 5c$, efectuando um sistema análogo ao da alínea g), o que justificaria, alternativamente, que $d, e \in F$. Portanto $G = \langle d, e\rangle \subset F = \langle a, b, c\rangle$, donde $F \cup G = F$.

g) Suponhamos, agora, que $G = \langle d', e\rangle$. Se $F \cup G$ fosse um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^5$ então $F \cup G$ seria fechado para a adição de vectores, mas isto não acontece. De facto, $a, d' \in F \cup G$ mas $2a - d' \notin F$ e $2a - d' \notin G$, como provaremos de seguida. Ora $2a - d' = (0, 0, -1, -1, 2)$. Então

$$\begin{aligned}
2a - d' \in F &\Leftrightarrow 2a - d' = \alpha a + \beta b + \gamma c \text{ para alguns } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \quad (\text{pois } F = \langle a, b, c\rangle) \\
&\Leftrightarrow (0, 0, -1, -1, 2) = \alpha(1, 1, 1, 0, 1) + \beta(1, -1, 2, 2, -7) + \gamma(2, 2, 1, 1, 4) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = -1 \\ 2\beta + \gamma = -1 \\ \alpha - 7\beta + 4\gamma = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ -2 = 0 \text{ impossível} \\ \alpha = 0 \\ \gamma = -1 \\ — \end{cases}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
2a-d' \in G &\Leftrightarrow 2a-d' = \alpha d' + \beta e \text{ para alguns } \alpha,\beta\in\mathbb{R} \quad (\text{pois } G=\langle d',e\rangle)\\
&\Leftrightarrow (0,0,-1,-1,2) = \alpha(2,2,3,1,0)+\beta(1,1,6,-5,-9)\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta=0\\ 2\alpha+\beta=0\\ 3\alpha+6\beta=-1\\ \alpha-5\beta=-1\\ -9\beta=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{1}{9}\\ \text{---}\\ \text{---}\\ \frac{1}{9}+\frac{10}{9}=-1 \text{ impossível}\\ \beta=-\frac{2}{9}\end{cases}.
\end{aligned}
$$

Portanto $2a-d'\notin F$ e $2a-d'\notin G$, donde $2a-d'\notin F\cup G$. Segue-se que $F\cup G$ não é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^5$ e estes subespaços ilustram a proposição enunciada.

h) (i) Sabemos, pela alínea a), que $B=A^T$ tem característica 3. Segue-se que $\dim\operatorname{im}T=3$. Logo, como $\dim\mathbb{R}^5=\dim\ker T+\dim\operatorname{im}T$, vem que $\dim\ker T=\dim\mathbb{R}^5-\dim\operatorname{im}T=5-3=2$.

(ii) Como $\dim\ker T=2>0$ então T não é injectivo. Como $\dim\operatorname{im}T=3<5=\dim\mathbb{R}^5$ (e $\mathbb{R}^5$ é o espaço de chegada) então T não é sobrejectivo.

(iii) Como B representa T relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^5$ então $\operatorname{im}T$ é o subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado pelas colunas de B, ou seja pelos vectores a, b, c, d, e de $\mathbb{R}^5$. Quer dizer que $\operatorname{im}T=\mathcal{V}=\langle a,b,c\rangle=\langle(1,1,1,0,1),(1,-1,2,2,-7),(2,2,1,1,4)\rangle$.

11. a) Temos

$$
|A| = \begin{vmatrix} k & t & 2\\ k & 2t-1 & 3\\ k & t & t+3\end{vmatrix} \underset{\substack{L_2-L_1\\ L_3-L_1}}{=} \begin{vmatrix} k & t & 2\\ 0 & t-1 & 1\\ 0 & 0 & t+1\end{vmatrix} = k(t-1)(t+1)=k(t^2-1)\,.
$$

b) $Ax=0$ é um sistema homogéneo e, portanto, sempre possível. Quer dizer que não existem $k\in\mathbb{R}$ e/ou $t\in\mathbb{R}$ tais que $Ax=0$ seja impossível. Por outro lado, temos

$$
\begin{aligned}
Ax=0 \text{ é determinado} &\iff \operatorname{rank}A=3 \Leftrightarrow |A|\neq 0\\
&\underset{a)}{\iff} k(t^2-1)\neq 0 \iff k\neq 0\wedge t\neq 1\wedge t\neq -1\,.
\end{aligned}
$$

Segue-se que

$$
\begin{aligned}
Ax=0 \text{ é indeterminado} &\iff \operatorname{rank}A<3 \iff |A|=0\\
&\underset{a)}{\iff} k(t^2-1)=0 \iff k=0\vee t=1\vee t=-1\,.
\end{aligned}
$$

c$_1$) Temos que

$$
A=\begin{bmatrix}2&1&2\\2&1&3\\2&1&4\end{bmatrix} \underset{\substack{L_2-L_1\\ L_3-L_1}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix}2&1&2\\0&0&1\\0&0&2\end{bmatrix} \underset{L_3-2L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix}2&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}.
$$

Assim,

$$
Ax=0 \Leftrightarrow \begin{cases}2x_1+x_2=0\\ x_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_2=-2x_1\\ x_3=0\end{cases}.
$$

Segue-se que

$$
U=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\colon x_2=-2x_1\,,\ x_3=0\}=\{(x_1,-2x_1,0)\colon x_1\in\mathbb{R}\}=\langle(1,-2,0)\rangle\,.
$$

Portanto $((1,-2,0))$ é uma base para o espaço U.

$\mathbf{c}_2$) Consideremos a base canónica, $\mathcal{B} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$, de $\mathbb{R}^3$. Podemos substituir o primeiro vector pelo vector $(1,-2,0)$. Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, então os vectores $(1,-2,0)$, $(0,1,0),(0,0,1)$ são linearmente independentes. Como são em número $3 = \dim \mathbb{R}^3$ constituem uma base de $\mathbb{R}^3$.

$\mathbf{c}_3$) Consideremos $V = \langle (0,1,0),(0,0,1) \rangle$. Então

$$U + V = \langle (1,-2,0) \rangle + \langle (0,1,0),(0,0,1) \rangle = \langle (1,-2,0),(0,1,0),(0,0,1) \rangle = \mathbb{R}^3.$$

$\mathbf{c}_4$) Temos, por definição de subespaço gerado, que

$$\begin{aligned} V = \langle (0,1,0),(0,0,1) \rangle &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x,y,z) = \alpha(0,1,0) + \beta(0,0,1)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x,y,z) = (0,\alpha,\beta)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x = 0\}. \end{aligned}$$

Portanto a equação $x = 0$ representa o subespaço V.

$\mathbf{c}_5$) Sabemos que U é o espaço de soluções do sistema $Ax = 0$. Então $\{(1,0,1)\} + U$ é o conjunto de soluções do sistema $Ax = b$ que admite $(1,0,1)$ como solução particular. Quer dizer que

$$b = A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Deste modo,

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}.$$

<u>Alternativa</u>: Como $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ equiv $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'$ então U também é o espaço de soluções do sistema $A'x = 0$. Ora $A' \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e

$$A'x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}.$$

Segue-se que $\{(1,0,1)\} + U$ é o conjunto de soluções do sistema $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$.

12. a) O subespaço F é gerado pelo conjunto de vectores $\{(1,0,1),(0,2,-1),(2,2,1)\}$. Ora

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_3 - 2L_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \underset{L_3 - L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

logo este conjunto é linearmente dependente e $\dim F = 2$. Com efeito, temos $(2,2,1) = 2(1,0,1) + (0,2,-1)$ e, portanto, $\mathcal{B} = ((1,0,1),(0,2,-1))$ é uma base para F.

b) Temos que

$$(-2,6,-5) \in F \cup G \iff (-2,6,-5) \in F \text{ ou } (-2,6,-5) \in G\,.$$

Ora $(-2,6,-5) \notin G$, uma vez que este vector não satisfaz a equação $x = z$. Agora, como $F = \langle (1,0,1),(0,2,-1)\rangle$

$$\begin{aligned}(-2,6,-5) \in F &\iff (-2,6,-5) = \alpha(1,0,1) + \beta(0,2,-1) \text{ para alguns } \alpha,\beta \in \mathbb{R}\\ &\implies \begin{cases} \alpha = -2 \\ 2\beta = 6 \\ \alpha - \beta = -5 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 3 \\ -5 = -5 \end{cases}.\end{aligned}$$

Portanto, $(-2,6,-5) \in F$, donde $(-2,6,-5) \in F \cup G$.

c) Temos que

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in F \cap G &\Leftrightarrow (x,y,z) \in F \ \wedge \ (x,y,z) \in G\\ &\Leftrightarrow (x,y,z) = \alpha(1,0,1) + \beta(0,2,-1) \text{ para alguns } \alpha,\beta \in \mathbb{R} \ \wedge \ x = z\\ &\Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases} \wedge \quad x = z \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = x \\ \beta = \frac{y}{2} \\ x - \frac{y}{2} = z \end{cases} \wedge \quad x = z\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ 2x - y = 2z \\ x = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ y = 0 \\ x = z \end{cases}.\end{aligned}$$

Portanto o sistema $\begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$ define o subespaço $F \cap G$.

d) Por definição

$$F + G = \{u + v\colon\, u \in F\,,\ v \in G\}.$$

Sabemos que se $\mathcal{X}$ é um conjunto gerador para F e se $\mathcal{Y}$ é um conjunto gerador para G então $F + G$ é gerado por $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$. Portanto, comecemos por determinar um conjunto gerador para G:

$$\begin{aligned}G &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z\} = \{(x,y,x) : x,y \in \mathbb{R}\}\\ &= \{x(1,0,1) + y(0,1,0) : x,y \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,1),(0,1,0)\rangle\,.\end{aligned}$$

Deste modo,

$$F + G = \langle (1,0,1),(0,2,-1),(1,0,1),(0,1,0)\rangle = \langle (1,0,1),(0,2,-1),(0,1,0)\rangle.$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, os três geradores de $F + G$ são linearmente independentes e, portanto, constituem uma base para $F + G$. Logo, $\dim F + G = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, donde $F + G = \mathbb{R}^3$.

e) Temos que $(0,1,0) \in G = \langle (1,0,1),(0,1,0) \rangle$, mas $(0,1,0) \notin F$ porque $F = \langle (1,0,1), (0,2,-1) \rangle$ e $(0,1,0)$ é independente dos vectores $(1,0,1),(0,2,-1)$ - provado em **d)**. Assim, $H = \langle (0,1,0) \rangle \subseteq G$ e $F \cap H = \{(0,0,0)\}$, como queríamos.

f) Temos que $U = \langle (1,0,1) \rangle \subseteq \langle (1,0,1),(0,1,0) \rangle = G$ e como $(1,0,1) \in F$, então $F + U = F$. Logo $\dim(F+U) = \dim F = 2$.

Problemas Teóricos

13. a) É claro que $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$ e que $\mathcal{M} \neq \emptyset$, pois $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}$. Agora, para quaisquer $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que

$$A + B = \begin{bmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{bmatrix} \in \mathcal{M} \ , \ \alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a & -\alpha b \\ \alpha b & \alpha a \end{bmatrix} \in \mathcal{M},$$

o que prova que $\mathcal{M}$ é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

b) Dada uma matriz qualquer $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ temos que $A = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, donde $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ gera $\mathcal{M}$. Além disso estes vectores são linearmente independentes:

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}.$$

Segue-se que $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de $\mathcal{M}$ e, portanto, $\dim \mathcal{M} = 2$.

14. a) Denotemos por 0_E o vector nulo do espaço vectorial E. Como F, G, H são subespaços de E então $0_E \in F, G, H$. Assim, temos que, para qualquer vector $w \in E$

$$w \in F + (G \cap H) \iff w = u + v \text{ para alguns } u \in F, v \in G \cap H.$$

Mas $v \in G \cap H$ implica que $v \in H$ e temos que

$$u = u + 0_E \in F + G \ , \ v = 0_E + v \in F + H,$$

donde $w = u + v \in (F+G) \cap (F+H)$. Segue-se que $F + (G \cap H) \subseteq (F+G) \cap (F+H)$.

b) Atendendo à hipótese $F + G = G$. Logo para $w \in E$ qualquer, temos que

$$\begin{aligned} w \in (F+G) \cap (F+H) = G \cap (F+H) &\iff w \in G \wedge w \in F + H \\ &\implies \begin{cases} w \in G \\ w = u + v \text{ para alguns } u \in F, v \in H \end{cases}. \end{aligned}$$

Deste modo, $v \in H$ e $v = w - u \in G + F = G$, donde $v \in H \cap G$. Assim $w = u + v \in F + (G \cap H)$, o que prova que $(F+G) \cap (F+H) \subseteq F + (G \cap H)$. A igualdade segue-se por a).

FIM