

# Relatório da Actividade Formativa 2 - 2ª Parte

## ESCOLHA MÚLTIPLA

### Grelha de Correção

1. - a)    2. - d)    3. - c)    4. - b)    5. - c)    6. - b)    7. - d)    8. - d)

### Justificação

1. A afirmação a) é a verdadeira, pois sendo  $T$  uma transformação linear

$$2T(x, y, z) = T(2(x, y, z)) = T(2x, 2y, 2z).$$

As restantes afirmações são falsas:

- Se, por exemplo,  $T = \text{id } \mathbb{R}^3$  então  $T^2 = \text{id } \mathbb{R}^3$  e temos  $T^2(2, 0, 0) = (2, 0, 0) \neq (4, 0, 0)$ .
- Se, por exemplo,  $T$  é a transformação linear nula, i. e.  $T(x, y, z) = (0, 0, 0)$  para todos  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , então  $T(x-2, y-2, z-2) = (0, 0, 0) \neq -(2, 2, 2) = T(x, y, z) - (2, 2, 2)$ .
- Se, por exemplo,  $T = \text{id } \mathbb{R}^3$  e  $x \neq 0$  então  $T(x, 0, 0) = (x, 0, 0) \neq (0, 0, 0) = xT(0, 0, 0)$ .

2. Temos que

$$g^2(x, y) = g(g(x, y)) = g(0, x + y) = (0, x + y) = g(x, y).$$

Portanto a afirmação d) é verdadeira. As restantes afirmações são falsas:

- $f(0, 0) = (1, 0) \neq (0, 0)$ , logo  $f$  não é uma transformação linear.
- $g(1, 0) = (0, 1) = g(0, 1)$  e  $(1, 0) \neq (0, 1)$ , pelo que  $g$  não é injectiva.
- $(0, 0)$  não é imagem de algum  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  por meio de  $f$ , pelo que  $f$  não é sobrejectiva.

3. Temos que  $A = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(T)$ , onde  $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (0, 0, 1), (0, 0, 1))$  e  $\mathcal{B}' = ((1, 0), (-1, 1))$ . Assim como

$$(x, y, z) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 0) + (z - x)(0, 0, 1) \text{ - em relação à base } \mathcal{B} \text{ de } \mathbb{R}^3$$

então

$$T(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z - x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + z \\ -y + z \end{bmatrix},$$

donde, relativamente à base  $\mathcal{B}'$  de  $\mathbb{R}^2$ ,

$$T(x, y, z) = (x + z)(1, 0) + (-y + z)(-1, 1) = (x + y, -y + z).$$

Portanto a afirmação c) é verdadeira e as restantes são falsas.

4. Temos que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1}]{L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 + \frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim  $\text{rank } A = 3$ , donde  $\dim \text{im } T = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ . Segue-se que  $\text{im } T = \mathbb{R}^3 = \langle (1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3) \rangle$  e (iii) é verdadeira. Além disso,  $T$  é sobrejectiva, donde (ii) é falsa.

Por último,

$$T(-1, 0, 2, 3) = A \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

donde  $(-1, 0, 2, 3) \notin \ker T$ . Logo (i) é falsa. Portanto b) é a afirmação verdadeira.

5. Sabemos que sendo  $((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$  uma base de  $\mathbb{R}^3$ , então

$$\operatorname{im} T = \langle T(1, 0, 0), T(1, 1, 0), T(1, 1, 1) \rangle = \langle (0, 1), (2, 1), (-1, 0) \rangle$$

e que deste conjunto de geradores podemos extrair a base  $((0, 1), (2, 1))$ . Logo  $(T(1, 0, 0), T(1, 1, 0))$  é uma base de  $\operatorname{im} T$ . Portanto a afirmação c) está correcta. As restantes afirmações são falsas:

- Como  $(1, 2, 3) = -(1, 0, 0) - (1, 1, 0) + 3(1, 1, 1)$  então  $T(1, 2, 3) = -(0, 1) - (2, 1) + 3(-1, 0) = (-5, -2) \neq (1, 6)$ .
- Ora  $\dim \operatorname{im} T \leq \dim \mathbb{R}^2 = 2$ . Logo,  $3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker T + \dim \operatorname{im} T \leq \dim \ker T + 2$ , donde  $\dim \ker T \geq 1$  e  $T$  não é injectivo.
- Notemos que  $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = M_{\mathcal{B}, \text{b.c.}\mathbb{R}^2}(T)$  onde  $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ .

6. Temos

$$A_a = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 - a & a \end{bmatrix}$$

pelo que  $\operatorname{rank} A_a = 2$  para todo  $a \in \mathbb{R}$ . Logo,  $\dim \operatorname{im} f_a = \operatorname{rank} A_a = 2 = \dim \mathbb{R}^2$  para todo  $a \in \mathbb{R}$ , o que quer dizer que  $f_a$  é sobrejectiva qualquer que seja  $a$ . Portanto, a afirmação b) é verdadeira. As restantes afirmações são falsas, pois  $\dim(\ker f_a) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim(\operatorname{im} f_a) = 3 - 2 = 1$  e  $A_a$  não é uma matriz quadrada.

7. Como  $A$  é uma matriz de tipo  $3 \times 3$ , então

$$\operatorname{rank} A = 1 < 3 \implies |A| = 0 \iff |A - 0I_3| = 0 \iff 0 \text{ é valor próprio de } A.$$

Mais,

$$\dim E(0) = 3 - \operatorname{rank} A = 3 - 1 = 2,$$

o que prova a veracidade de d). Segue-se que a) e c) são falsas. Quanto a b) podemos considerar, por exemplo,  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  que satisfaz  $A^2 = 0$ , donde 0 é valor próprio de  $A$  com  $m. a.(0) = 3$ . Portanto b) é falsa.

8. O polinómio característico de uma matriz é igual ao polinómio característico da matriz transposta. Portanto  $p_{AT}(x) = x^2(x - 1)$  e a afirmação d) é verdadeira. As restantes afirmações são falsas:

- O vector nulo não é vector próprio por definição. Portanto a) é falsa.
- Como  $p_A(x) = x^2(x - 1)$  então 0 e 1 são valores próprios de  $A$  com multiplicidade algébrica 2 e 1, respectivamente. Se as multiplicidades geométricas coincidirem com as algébricas a matriz é diagonalizável. Caso contrário não é diagonalizável.

## VERDADEIRO/FALSO

**9. a)** A afirmação é falsa. Com efeito, se  $T$  fosse uma aplicação linear então  $T(0, 0) = (0, 0)$ . Mas, neste caso,  $T(0, 0) = (1, 0) \neq (0, 0)$ , o que prova que  $T$  não é linear.

**b)** A afirmação é falsa. Com efeito, temos que  $T(1, 0) = (1, 1, 0)$  e

$$T(0, 1) = T[(1, 1) - (1, 0)] \underset{T \text{ aplic. linear}}{=} T(1, 1) - T(1, 0) = (0, 1, 1) - (1, 1, 0) = (-1, 0, 1),$$

donde  $M_{\text{b.c. } \mathbb{R}^2, \text{b.c. } \mathbb{R}^3}(T) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

(Note que a matriz de uma aplicação linear tem por colunas as imagens dos vectores da base de partida escritas em relação à base de chegada.)

**c)** Se  $T$  não é sobrejectiva, então  $\text{im } T \neq \mathbb{R}^3$ . Segue-se que  $\dim \text{im } T < 3$  e, portanto,  $\dim \ker T = 3 - \dim \text{im } T > 0$ . Logo  $\dim E(0) > 0$  e  $0$  é valor próprio de  $T$ . A afirmação é, pois, verdadeira.

**d)** Como  $|A| = 0$ ,  $|A - I_4| = 0$ ,  $|A + I_4| = 0$ ,  $|A - 44I_4| = 0$ , então  $0, 1, -1, 44$  são valores próprios de  $A$ , e são todos os possíveis, uma vez que  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ . Como são todos distintos, então  $A$  é diagonalizável. A afirmação é, pois, verdadeira.

## PROBLEMAS PRÁTICOS

**10. a)** Temos que  $\dim \text{im } T = \text{rank } A = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$ , pelo que  $T$  não é sobrejectiva.

**b)** Como  $A = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(T)$  e  $\mathcal{B} = \text{b.c. } \mathbb{R}^3$  então, para todo  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,

$$T(x, y, z) = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y + z \\ 0 \\ -x + z \end{bmatrix} \text{ na base } \mathcal{B}'.$$

Portanto, como  $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ ,

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= (x + 2y + z)u_1 + 0u_2 + (-x + z)u_3 = (x + 2y + z)(1, 0, 1) + (-x + z)(0, 1, 1) \\ &= (x + 2y + z, -x + z, 2y + 2z). \end{aligned}$$

**c)** Sabemos que o espaço  $\text{im } T$  é gerado pelas imagens de uma base do espaço de partida. Em particular,

$$\begin{aligned} \text{im } T &= \langle T(1, 0, 0), T(0, 1, 0), T(0, 0, 1) \rangle \underset{\text{b)}}{=} \langle (1, -1, 0), (2, 0, 2), (1, 1, 2) \rangle \\ &= \langle (1, -1, 0), (2, 0, 2) \rangle, \end{aligned}$$

uma vez que  $\dim \text{im } T = 2$  e  $(1, 1, 2) = -(1, -1, 0) + (2, 0, 2)$ . Portanto  $((1, -1, 0), (2, 0, 2))$  é uma base de  $\text{im } T$ .

**d)** Por definição  $\ker T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : T(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$ . Ora  $T(1, -1, 1) = (0, 0, 0)$ , por b), donde  $(1, -1, 1) \in \ker T$ . Como  $\dim \ker T = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{im } T = 3 - 2 = 1$  (Teorema das dimensões), vem que  $((1, -1, 1))$  é uma base para  $\ker T$ .

Alternativa:  $\ker T$  é o espaço das soluções do sistema homogéneo  $Ax = 0$ . Portanto resolvendo este sistema determina-se  $\ker T$ . No entanto, neste caso é mais eficiente o método apresentado.

e) Temos que

$$0 \text{ é valor próprio de } T \Leftrightarrow \exists v \neq (0, 0, 0): T(v) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \ker T \neq \{(0, 0, 0)\}.$$

Portanto, por d), 0 é valor próprio de  $T$ . Por outro lado, temos que

$$E(0) \stackrel{\text{def.}}{=} \{v \in \mathbb{R}^3: Av = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^3: T(v) = (0, 0, 0)\} = \ker T = \langle (1, -1, 1) \rangle.$$

f) Por definição  $\lambda$  é valor próprio de  $A$  se e só se  $|A - \lambda I_3| = 0$ . Temos que

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2(-\lambda) - \lambda = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 2).$$

Ora

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \iff \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} \iff \lambda = 1 + \sqrt{i} \vee \lambda = 1 - \sqrt{i}.$$

Assim as raízes do polinómio característico são:  $0, 1 + \sqrt{i}, 1 - \sqrt{i}$ . Segue-se que o único valor próprio real de  $A$  é o 0, e o respectivo subespaço próprio é  $E(0) = \langle (1, -1, 1) \rangle$ . Como  $m.g.(0) = \dim E(0) = 1$  e  $A$  é uma matriz de tipo  $3 \times 3$ , então  $A$  não é diagonalizável.

Nota: Note que os valores próprios complexos de  $A$  são:  $0, 1 + \sqrt{i}, 1 - \sqrt{i}$  e como são todos distintos então necessariamente

$$m.g.(0) = m.g.(1 + \sqrt{i}) = m.g.(1 - \sqrt{i}) = 1$$

donde  $m.g.(0) + m.g.(1 + \sqrt{i}) + m.g.(1 - \sqrt{i}) = 3$  e, portanto,  $A$  considerada como uma matriz com entradas no corpo  $\mathbb{C}$  dos números complexos, é semelhante à matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \sqrt{i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \sqrt{i} \end{bmatrix}.$$

11. a) Temos que

$$b = (1, 0, 1) \in \text{im } f_\alpha \iff \text{o sistema } A_\alpha x = b \text{ for possível} \iff \text{rank } A_\alpha = \text{rank}[A_\alpha|b].$$

Vamos efectuar transformações elementares sobre as linhas de modo a transformar a matriz ampliada  $[A_\alpha|b]$  numa forma escalonada:

$$\begin{aligned} [A_\alpha|b] &= \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 - \alpha & 0 & -(\alpha + 1) & 1 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -(\alpha + 1) & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -(\alpha + 1) & 1 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 - \alpha & 0 & -(\alpha + 1) & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{L_3 + (\alpha - 1)L_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -(\alpha + 1) & 1 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha(\alpha + 1) & \alpha \end{array} \right] \end{aligned}$$

– porque  $-(\alpha + 1)(\alpha - 1) - (\alpha + 1) = -(\alpha + 1)(\alpha - 1 + 1) = -\alpha(\alpha + 1)$ .

- Se  $\alpha = -1$  então  $\text{rank } A_\alpha = 2 < 3 = \text{rank}[A_\alpha|b]$ . Neste caso, o sistema  $A_\alpha x = b$  é impossível.
- Se  $\alpha = 0$  então  $\text{rank } A_\alpha = 1 = \text{rank}[A_\alpha|b]$ . Neste caso, o sistema  $A_\alpha x = b$  é possível e indeterminado (com grau de indeterminação 2).
- Se  $\alpha \neq -1$  e  $\alpha \neq 0$  então  $\text{rank } A_\alpha = 3 = \text{rank}[A_\alpha|b]$ . Neste caso, o sistema  $A_\alpha x = b$  é possível e determinado.

Portanto o sistema  $A_\alpha x = b$  é possível sse  $\alpha \neq -1$ . Segue-se que

$$b = (1, 0, 1) \in \text{im } f_\alpha \iff \alpha \neq -1.$$

b) Sabemos que

$$f_\alpha \text{ é sobrejectivo} \iff \dim \text{im } f_\alpha = 3 \iff \text{rank } A_\alpha = 3.$$

Ora por a),

$$\text{rank } A_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 2 & \text{se } \alpha = -1 \\ 3 & \text{se } \alpha \neq 0 \text{ e } \alpha \neq -1 \end{cases}.$$

Logo

$$f_\alpha \text{ é sobrejectivo} \iff \alpha \neq 0 \text{ e } \alpha \neq -1.$$

c) Sabemos que

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker f_\alpha + \dim \text{im } f_\alpha = \dim \ker f_\alpha + \text{rank } A_\alpha,$$

donde  $\dim \ker f_\alpha = 3 - \text{rank } A_\alpha$ . Atendendo à alínea b),

$$\dim \ker f_\alpha = \begin{cases} 2 & \text{se } \alpha = 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = -1 \\ 0 & \text{se } \alpha \neq 0 \text{ e } \alpha \neq -1 \end{cases}.$$

Segue-se que

$$f_\alpha \text{ é injectivo} \iff \dim \ker f_\alpha = 0 \iff \alpha \neq 0 \text{ e } \alpha \neq -1.$$

d) Temos que  $f = f_{-1}$  e  $A = A_{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

d<sub>1</sub>) Temos que

$$f(x, y, z) \underset{\text{matricialmente}}{=} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ y \\ x \end{bmatrix}.$$

Por conseguinte,  $f(x, y, z) = (2x, y, x)$ , para todo  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

d<sub>2</sub>) Temos, por a), que  $f(1, 0, 0) = (2, 0, 1)$ ,  $f(-1, 0, 2) = (-2, 0, -1)$ . Agora temos que escrever estes vectores como combinação linear dos vectores da base  $\mathcal{B}'$ :

$$\begin{aligned} (2, 0, 1) = a(1, 0, 1) + b(0, 1, 1) + c(1, 1, 0) &\iff \begin{cases} a + c = 2 \\ b + c = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases} ; \\ (-2, 0, -1) = a(1, 0, 1) + b(0, 1, 1) + c(1, 1, 0) &\iff \begin{cases} a + c = -2 \\ b + c = 0 \\ a + b = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = -\frac{1}{2} \end{cases} . \end{aligned}$$

Portanto

$$f(1, 0, 0) = (2, 0, 1) = \frac{3}{2}(1, 0, 1) - \frac{1}{2}(0, 1, 1) + \frac{1}{2}(1, 1, 0),$$

$$f(-1, 0, 2) = (-2, 0, -1) = -\frac{3}{2}(1, 0, 1) + \frac{1}{2}(0, 1, 1) - \frac{1}{2}(1, 1, 0).$$

**d<sub>3</sub>**) Sabemos, pela alínea b), que  $\dim \ker f = 1$ , donde qualquer base de  $\ker f$  tem 1 vector. Temos, por definição, que

$$\ker f = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : f(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)\}.$$

Assim os vectores de  $\ker f$  são as soluções do sistema homogéneo  $Ax = 0$ :

$$Ax = 0 \iff \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x_1 = 0, x_2 = 0.$$

Portanto

$$\ker f = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0, x_2 = 0\} = \{(0, 0, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\} = \langle (0, 0, 1) \rangle.$$

Segue-se que  $\langle (0, 0, 1) \rangle$  é uma base de  $\ker f$ .

Nota: Repare que  $f(1, 0, 0) = (2, 0, 1)$  e que  $f(-1, 0, 2) = (-2, 0, -1)$ , donde  $f(0, 0, 2) = f[(1, 0, 0) + (-1, 0, 2)] = (0, 0, 0)$ . Portanto  $(0, 0, 2) \in \ker f$ , e também  $(0, 0, 1) \in \ker f$ . Como  $\dim \ker f = 1$ , então  $\langle (0, 0, 1) \rangle$  é uma base de  $\ker f$ .

**d<sub>4</sub>**) Por definição

$$f^{-1}(\{(1, 0, 1)\}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (1, 0, 1)\}.$$

Assim os vectores de  $\mathbb{R}^3$  que estão no conjunto  $f^{-1}(\{(1, 0, 1)\})$  são exactamente as soluções do sistema  $Ax = (1, 0, 1)$ , que sabemos ser impossível pela alínea a) (porque  $\alpha = -1$ ). Segue-se que

$$f^{-1}(\{(1, 0, 1)\}) = \emptyset.$$

Analogamente

$$f^{-1}(\{(-2, 0, -1)\}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (-2, 0, -1)\}.$$

Pela alínea  $d_2$ ,  $f(-1, 0, 2) = (-2, 0, -1)$  pelo que  $(-1, 0, 2)$  é uma solução particular do sistema  $Ax = (-2, 0, -1)$ . Segue-se que as soluções deste sistema são da forma

$$\text{sol. particular} + \text{sol. do sist. hom. asso.} = \{(-1, 0, 2)\} + \ker f = \{(-1, 0, 2)\} + \langle (0, 0, 1) \rangle.$$

Portanto, por exemplo, também  $(-1, 0, 0) = (-1, 0, 2) - 2(0, 0, 1) \in f^{-1}(\{(-2, 0, -1)\})$ . Assim, temos que

$$f^{-1}(\{(-2, 0, -1)\}) = \{(-1, 0, 2)\} + \langle (0, 0, 1) \rangle = \{(-1, 0, 0)\} + \langle (0, 0, 1) \rangle.$$

Alternativa: Poderíamos resolver directamente o sistema  $Ax = (-2, 0, -1)$ :

$$[A|(-2, 0, 1)] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 - L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{(-2, 0, -1)\}) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -1, y = 0\} = \{(-1, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(-1, 0, 0) + z(0, 0, 1) : z \in \mathbb{R}\} = \{(-1, 0, 0)\} + \langle(0, 0, 1)\rangle \\ &= \{(-1, 0, 0)\} + \ker f. \end{aligned}$$

**d<sub>5</sub>**) Denotemos por  $\mathcal{B}$  a base canónica  $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$  de  $\mathbb{R}^3$ . Sabemos, pela proposição 5.3.19, que

$$B = M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f) = S^{-1}M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)S = S^{-1}AS$$

onde  $S$  representa a matriz de passagem da base  $\mathcal{B}$  para a base  $\mathcal{B}'$ , isto é,  $S = M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id})$  – as colunas de  $S$  são as coordenadas dos vectores da nova base  $\mathcal{B}'$  em relação à base original  $\mathcal{B}$  (ver proposição 4.8.2). Isto pode ser visualizado no seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{B}' & B & \mathcal{B}' \\ \text{id} \downarrow S & & S^{-1} \uparrow \text{id}. \\ \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{B} & A & \mathcal{B} \end{array}$$

Portanto, neste caso,

$$S = M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\text{id}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}.$$

A matriz  $S^{-1}$  pode ser determinada por dois processos:

1º processo:

$$[S \mid I_3] \xrightarrow[\text{sobre as linhas}]{\text{transf. elementares}} [I_3 \mid S^{-1}]$$

2º processo:

$$S^{-1} = \frac{1}{|S|} \text{adj } S.$$

Vamos optar pelo 1º processo que é, de maneira geral, o menos trabalhoso. Para treino poderá usar o 2º processo para determinar  $S^{-1}$  – o resultado obtido terá de ser o mesmo.

$$\begin{aligned} [S \mid I_3] &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3-L_1} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{L_3-L_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}L_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right] \\ &\xrightarrow[\substack{L_2-L_3 \\ L_1-L_3}]{L_2-L_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right] = [I_3 \mid S^{-1}]. \end{aligned}$$

Segue-se que  $S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ . Deste modo,

$$B = M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}'}(f) = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Alternativa: As colunas da matriz  $B = M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}'}(f)$  são da forma:

$$B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix}$$

onde os  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  são os escalares que se obtêm escrevendo as imagens dos vectores da base da partida (que é  $\mathcal{B}'$ ) como combinação linear dos vectores da base da chegada (que também é  $\mathcal{B}'$ ):

$$\begin{aligned} f(1, 0, 1) &= \alpha_1(1, 0, 1) + \alpha_2(0, 1, 1) + \alpha_3(1, 1, 0), \\ f(0, 1, 1) &= \beta_1(1, 0, 1) + \beta_2(0, 1, 1) + \beta_3(1, 1, 0), \\ f(1, 1, 0) &= \gamma_1(1, 0, 1) + \gamma_2(0, 1, 1) + \gamma_3(1, 1, 0). \end{aligned}$$

Ora, vimos em  $\mathbf{d}_1$ ) que  $f(x, y, z) = (2x, y, x)$ . Assim, temos que

$$\begin{aligned} f(1, 0, 1) &= (2, 0, 1) = \alpha_1(1, 0, 1) + \alpha_2(0, 1, 1) + \alpha_3(1, 1, 0), \\ f(0, 1, 1) &= (0, 1, 0) = \beta_1(1, 0, 1) + \beta_2(0, 1, 1) + \beta_3(1, 1, 0), \\ f(1, 1, 0) &= (2, 1, 1) = \gamma_1(1, 0, 1) + \gamma_2(0, 1, 1) + \gamma_3(1, 1, 0). \end{aligned}$$

Resolvendo sistemas, como na alínea  $\mathbf{d}_2$ ), obtemos  $\alpha_1 = \frac{3}{2}, \alpha_2 = -\frac{1}{2}, \alpha_3 = \frac{1}{2}, \beta_1 = -\frac{1}{2}, \beta_2 = \frac{1}{2}, \beta_3 = \frac{1}{2}, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 1$  (confirme!). Segue-se que  $B = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ .

Note que o 1º processo é mais eficiente. O 2º processo só é mais rápido se a base do espaço de chegada é a base canónica. Neste caso a determinação dos  $\alpha_i, \beta_i$  e  $\gamma_i$  é imediata.

**12. a)** Temos que  $u \neq 0$  é vector próprio de  $A$  se existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $Au = \lambda u$ . Assim vamos computar  $A(0, 1, 1)$  e  $A(-9, 4, 1)$ :

$$\begin{aligned} A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ A \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ 12 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim  $u = (0, 1, 1)$  é vector próprio de  $A$  associado ao valor próprio 0 e  $v = (-9, 4, 1)$  é vector próprio de  $A$  associado ao valor próprio 3.

**b)** Por definição,

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1 - \lambda & -1 \\ 0 & 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{Laplace}}{=} (-1)^{1+1}(3 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (3 - \lambda)((1 - \lambda)(-1 - \lambda) + 1) = (3 - \lambda)\lambda^2 = -\lambda^3 + 3\lambda^2. \end{aligned}$$

Segue-se que, 0 e 3 são os valores próprios de  $A$ . 0 é valor próprio com multiplicidade algébrica 2 porque ocorre duas vezes como raiz e 3 tem multiplicidade algébrica 1.

Nota: Repare que já sabíamos, pela alínea a), que 0 e 3 eram valores próprios de  $A$ . Portanto o polinómio característico de  $A$  teria que ter a forma  $p_A(\lambda) = h(\lambda)\lambda(3 - \lambda)$  com  $h(\lambda)$  um polinómio de grau 1.

c) Sabemos que  $A$  é raiz do seu polinómio característico, isto é  $p_A(A) = 0$  (ver Proposição 2.7.28). Assim temos que

$$0 = p_A(A) = -A^3 + 3A^2. \quad (*)$$

Efectuando a divisão de  $\lambda^7$  por  $-\lambda^3 + 3\lambda^2$ , obtemos

$$\lambda^7 = (-\lambda^3 + 3\lambda^2)(-\lambda^4 - 3\lambda^3 - 9\lambda^2 - 27\lambda - 81) + 243\lambda^2.$$

(Confirme!) Segue-se que

$$A^7 = \underbrace{(-A^3 + 3A^2)}_0 (-A^4 - 3A^3 - 9A^2 - 27A - 81I_3) + 243A^2 = 243A^2 \quad (\text{por } (*))$$

Agora

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = 3A^2 = 3 \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^7 = 243A^2 = \begin{bmatrix} 2187 & 0 & 0 \\ -972 & 0 & 0 \\ -243 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

d) Pela alínea c) sabemos que 0 e 3 são os valores próprios de  $A$  com multiplicidade algébrica 2 e 1, respectivamente. Ora, por definição

$$x \in \mathbb{R}^3 \text{ é valor próprio de } A \iff (A - 0I_3)x = 0 \iff Ax = 0.$$

Assim o subespaço próprio  $E(0)$  associado ao valor próprio  $\lambda = 0$  é o subespaço das soluções do sistema homogéneo  $Ax = 0$ , isto é

$$E(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 0\}.$$

Ora

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2+L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3-L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde  $\text{rank } A = 2$ . Segue-se que

$$\text{m. g.}(0) = \dim E(0) = 3 - \text{rank } A = 3 - 2 = 1 < 2 = \text{m. a.}(0)$$

e, portanto,  $A$  não é diagonalizável.

Por outro lado, pela alínea b), temos que  $(0, 1, 1)$  é vector próprio de  $A$  associado ao valor próprio 0, logo como  $\dim E(0) = 1$  temos que  $E(0) = \langle (0, 1, 1) \rangle$ . Também  $(-9, 4, 1)$  é vector próprio de  $A$  associado ao valor próprio 3 e, temos que,

$$1 \leq \dim E(3) = \text{m. g.}(3) \leq \text{m. a.}(3) = 1.$$

Logo  $\dim E(3) = 1$  e, portanto,  $E(3) = \langle (-9, 4, 1) \rangle$ .

Nota: Alternativamente poderíamos determinar  $E(0)$  e  $E(3)$  directamente determinando o subespaço das soluções dos sistemas homogéneos  $Ax = 0$  e  $(A - 3I_3)x = 0$ , respectivamente. Com efeito, como

$$A \text{ equivalente } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ então } Ax = 0 \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases}.$$

Assim

$$\begin{aligned} E(0) &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0, x_2 = x_3\} = \{(0, x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_3(0, 1, 1) : x_3 \in \mathbb{R}\} = \langle (0, 1, 1) \rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$A - 3I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2+2L_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-L_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix},$$

donde

$$(A - 3I_3)x = 0 \iff \begin{cases} x_1 + 9x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -9x_3 \\ x_2 = 4x_3 \end{cases}.$$

Logo

$$E(3) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = -9x_3, x_2 = 4x_3\} = \{(-9x_3, 4x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\} = \langle (-9, 4, 1) \rangle.$$

e<sub>1</sub>) Recorrendo a um dos processos:  $[S | I_3] \xrightarrow[\text{nas linhas}]{\text{transf. elem.}} [I_3 | S^{-1}]$  ou  $S^{-1} = \frac{1}{|S|} \text{adj } S$ ,

obterá  $S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$  - Confirme!

e<sub>2</sub>) Sabemos, pela proposição 5.3.19, que

$$B = M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f) = I_3 M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f) S = AS$$

onde  $S$  representa a matriz de passagem da base  $\mathcal{B}$  para a base  $\mathcal{B}'$ , isto é,  $S = M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id})$  – as colunas de  $S$  são as coordenadas dos vectores da nova base  $\mathcal{B}'$  em relação à base original  $\mathcal{B}$  (ver proposição 4.8.2). Isto pode ser visualizado no seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{B}' & \xrightarrow{B} & \mathcal{B} \\ \text{id} \downarrow S & & I_3 \uparrow \text{id.} \\ \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{A} & \mathcal{B} \end{array}$$

Portanto, neste caso,

$$B = I_3 AS = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

e<sub>3</sub>) Neste caso, temos a situação:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{C} & \mathcal{B}' \\ \text{id} \downarrow I_3 & & S^{-1} \uparrow \text{id.} \\ \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{A} & \mathcal{B} \end{array}$$

Com efeito, se  $S = M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id})$  então  $S^{-1} = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\text{id})$ . Assim temos

$$C = S^{-1}AI_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

e<sub>4</sub>) Neste caso, o diagrama e a matriz  $M$  são respectivamente:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{B}' & \xrightarrow{M} & \mathcal{B}' \\ \text{id} \downarrow \text{S} & & \text{S}^{-1} \uparrow \text{id} \\ \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{A} & \mathcal{B} \end{array}, \quad M = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

## PROBLEMAS TEÓRICOS

13. a) Por definição

$\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$  é um conjunto  $c/ n$  vectores linearmente independentes  $\iff [\alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_n T(u_n) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0]$ .

Assim,

$$\begin{aligned} \alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_n T(u_n) = 0 & \xLeftrightarrow[T \text{ aplic. linear}] T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) = 0 \\ & \xRightarrow{T \text{ injectiva}} \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0 \\ & \xRightarrow{\{u_1, \dots, u_n\} \text{ l. indep.}} \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0. \end{aligned}$$

Segue-se que  $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$  é um conjunto com  $n$  vectores linearmente independentes.

b) Temos, pelo Teorema das dimensões, que  $\dim U = \dim \ker T + \dim \text{im } T$  e, por hipótese,  $\dim U = \dim V$ . Assim,

$$\begin{aligned} T \text{ injectiva} & \iff \dim \ker T = 0 \xLeftrightarrow[T. \text{ das dimensões}] \dim U = \dim \text{im } T \\ & \xLeftrightarrow[\text{hip.}] \dim V = \dim \text{im } T \iff T \text{ é sobrejectiva.} \end{aligned}$$

14. a) Suponhamos que  $B = P^{-1}AP$ . Então,

$$\begin{aligned} \lambda \text{ é valor próprio de } A & \iff |A - \lambda I_n| = 0 \stackrel{(1)}{\iff} |P^{-1}| |A - \lambda I_n| |P| = 0 \\ & \stackrel{(2)}{\iff} |P^{-1}(A - \lambda I_n)P| = 0 \stackrel{(3)}{\iff} |P^{-1}AP - \lambda I_n| = 0 \\ & \iff |B - \lambda I_n| = 0 \iff \lambda \text{ é valor próprio de } B \end{aligned}$$

(1) - porque sendo  $P$  invertível então  $|P| \neq 0$  e claro  $|P^{-1}| \neq 0$ ;

(2) - o produto de um número finito de determinantes é igual ao determinante do produto;

(3) - porque  $P^{-1}(\lambda I_n)P = \lambda(P^{-1}I_nP) = \lambda I_n$ .

b) Temos que

$$\begin{aligned} X \text{ é vector próprio de } B \text{ associado a } \lambda & \iff BX = \lambda X \iff (P^{-1}AP)X = \lambda X \iff P^{-1}(APX) = \lambda X \\ & \iff PP^{-1}(APX) = P(\lambda X) \iff I_n APX = \lambda(PX) \\ & \iff A(PX) = \lambda(PX) \iff \begin{array}{l} PX \text{ é vector próprio} \\ \text{de } A \text{ associado a } \lambda \end{array}. \end{aligned}$$

FIM