GRUPO I. (4 valores)

Mostre por indução que para todo o $n \in \mathbb{N}$ se tem:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 .$$

GRUPO II. (4 valores)

Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

1. $x^2 e^{-x}$,
2. $\dfrac{1}{x \log x}$, $x > 0$.

GRUPO III. (4 valores)

1. Determine a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$, e no caso de ser convergente calcule a sua soma,
2. determine o intervalo de convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{(x+1)^n}{(x-3)^n}$, e esclareça a natureza da série na fronteira do intervalo de convergência.

GRUPO IV. (4 valores)

Calcule o valor dos seguintes limites

1. $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^x$,
2. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + \cos x - e^x}{\log(1 + x^2)}$.

GRUPO V. (2 valores)

Estude a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^x \sin e^x \, dx$.

(Sugestão:Poderá ser útil efectuar uma mudança de variável no integral.)

GRUPO VI. (2 valores)

1. Prove que $\forall x > 0 \, , \log(x+1) - \log x < \dfrac{1}{x}$,
2. utilize a desigualdade anterior para estudar a natureza da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{n!+1}{n!}\right) .$$