Relatório do Teste Formativo 1
Análise Infinitesimal I
1999-2000

GRUPO I.

1. Uma vez que $\frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)} = \frac{1}{\alpha+n} - \frac{1}{\alpha+n+1}$, obtemos uma série de Mengoli, e portanto a soma parcial até à ordem N é:

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)} = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{\alpha+n} - \frac{1}{\alpha+(n+1)} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\alpha+n} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\alpha+(n+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\alpha+n} - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{\alpha+n} \\ &= \frac{1}{\alpha+0} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\alpha+n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\alpha+n} - \frac{1}{\alpha+(N+1)} \\ &= \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha+(N+1)}. \end{aligned}$$

E portanto tem-se $\lim S_N = \lim \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha+(N+1)} \right) = \frac{1}{\alpha}$.

2. Comecemos por calcular

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Mas para $n > 1$ tem-se $\sqrt{n} < n$, $\sqrt{n+1} < n$ e portanto $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} > \frac{1}{2n}$ que é divergente. Pelo critério de comparação podemos concluir que a série dada também é divergente.

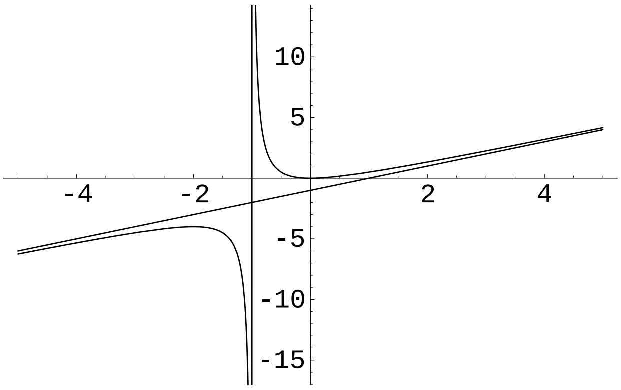

Figura 1: O gráfico de $\frac{x^2}{x+1}$ e das assímptotas

GRUPO II.

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

2.,3. $f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$, portanto $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. A derivada anula-se em -2 e em 0 , sendo negativa entre -2 e 0 (não estando definida em -1) , e positiva à esquerda de -2 e à direita de 0.

4. $f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$, portanto $D_{f''} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. A segunda derivada não se anula, sendo negativa à esquerda de -1 e positiva à direita de -1 , não existindo portanto pontos de inflexão,

5. tem-se $\lim_{x \to -1^\pm} f(x) = \pm\infty$, tendo-se portanto uma assímptota vertical (de equação $x = -1$) , de ambos os lados de -1. Para ver se existem assímptotas oblíquas calculamos $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ e $\lim_{x \to \pm\infty}(f(x) - x) = \lim_{x \to \pm\infty} -\frac{x}{x+1} = -1$. Temos assim uma assímptota oblíqua em $-\infty$ e em $+\infty$, de equação $y = x - 1$,

6. podemos reunir esta informação numa tabela que nos permite esboçar o gráfico de f :

x	$-\infty$		-2			-1			0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$		$\Vert$		$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty$	$\Vert$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
f''		$\cap$		$\cap$		$\Vert$		$\cup$		$\cup$	

Utilizando estas informações podemos finalmente esboçar o gráfico da função e das assímptotas.

GRUPO III.

1. A aplicação directa das regras dos limites fornece uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Para levantar esta indeterminação podemos utilizar a Regra de

l'Hôpital uma vez que as funções no numerador e no denominador são ambas diferenciáveis na origem, obtendo-se:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x - x)'}{(x-\operatorname{tg} x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{1-\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x - 1)\cos^2 x}{\cos^2 x - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x}{\cos x + 1}\,,$$

e este último limite é igual a $\frac{1}{2}$.

2. Este limite produz uma indeterminação do tipo $1^{+\infty}$. Mas como

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\exp\left[\log\left((\cos x)^{\frac{1}{x^2}}\right)\right] = \exp\left[\lim_{x\to 0}\frac{\log\cos x}{x^2}\right]\,,$$

a indeterminação é agora do tipo $\frac{0}{0}$, e portanto podemos aplicar a Regra de Cauchy, visto que as funções são diferenciáveis numa vizinhança de 0. Assim temos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(\log\cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x\cos x} =$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\,\frac{-1}{2\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\,\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2\cos x} = -\frac{1}{2}\,,$$

e portanto o limite pedido é igual a $e^{-\frac{1}{2}}$.

GRUPO IV.

1. $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}, x > 0$
   Podemos escrever a função como $e^u u'$ onde a menos de uma constante real multiplicativa, $u(x) = \sqrt{x}$. Ajustando a constante obtemos a função: $2e^{\sqrt{x}} + K, K \in \mathbb{R}$.

2. $f(x) = \frac{1}{1+\sin x+\cos x}, x \in [0,\pi[$.
   Consideremos a seguinte mudança de variável: $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Então tem-se $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, e $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$. E portanto $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{dt}{1+t} = \log(1+t) = \log(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2})$. Podemos exprimir esta função em termos de x, obtendo-se $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$. Assim

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \log\left(1+\frac{\sin x}{1+\cos x}\right) + K, K\in\mathbb{R}\,.$$

GRUPO V.

1. Temos um integral impróprio visto que o intervalo de integração não é limitado. Utilizando o critério de comparação tem-se $x^3+1 > x^3\,, \forall x \geq 1$ e portanto, $\sqrt{x^3+1} > x^{3/2}$. E portanto também $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} < \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{3/2}} < \infty$, visto tratar-se de um integral de Dirichlet (com $\alpha = 3/2$), que sabemos ser convergente; logo o integral dado é convergente.

GRUPO VI.

$$S = \{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} : n,\, m \in \mathbb{N}_1\}\,.$$

Como $n \in \mathbb{N}_1$ têm-se as seguintes desigualdades: $\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \leq 1 - \frac{1}{m} < 1$ e $\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \geq \frac{1}{n} - 1 > -1$, ou seja $-1 < \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < 1$. Donde se conclui que o conjunto S é limitado, e que -1 é um minorante de S e 1 é um majorante de S . O conjunto dos majorantes é portanto $[1, +\infty[$ e o dos minorantes $]-\infty, -1]$. Em virtude das desigualdades acima, é de esperar que -1 seja o $\inf S$ e 1 o $\sup S$, pois n e m podem ser tão grandes quanto se queira, e portanto os seus inversos tão pequenos quanto se queira. Para vermos que isso acontece vamos utilizar a definição de $\sup S$:

$$1 = \sup S \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\,,\, \exists x \in S : x > 1 - \varepsilon\,.$$

Dito de outra forma, fixado um $\varepsilon > 0$ temos de encontrar n e m inteiros naturais positivos tais que $\frac{1}{n} - \frac{1}{m} > 1 - \varepsilon$. Como $\frac{1}{n}$ toma o seu maior valor para $n = 1$, tomemos então $n = 1$; ficamos agora reduzidos ao problema de saber se existe um $m \in \mathbb{N}_1$ que verifique $1 - \frac{1}{m} > 1 - \varepsilon$ isto é $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Que é possível encontrar m nessas condições decorre do facto de $\mathbb{R}$ ser um corpo ordenado arquimediano, e portanto, de facto $1 = \sup S$. A demonstração de $-1 = \inf S$ é análoga. Vejamos agora se existem $\max S$ e $\min S$. Tendo em conta as desigualdades estritas $-1 < \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < 1$, podemos concluir que não existem $n,\, m \in \mathbb{N}_1$ tais que $\frac{1}{n} - \frac{1}{m}$ seja igual a 1 ou a -1 e portanto $\inf S \notin S$ e $\sup S \notin S$; ou seja $\max S$ e $\min S$ não existem.