

Relatório do Teste Formativo 2
Análise Infinitesimal I
1999-2000

GRUPO I.

1. Trata-se de uma série geométrica de razão $1 + \sin \alpha$ que é absolutamente convergente sse $|1 + \sin \alpha| < 1$. Mas $|1 + \sin \alpha| < 1 \iff -1 < 1 + \sin \alpha < 1 \iff \sin \alpha < 0 \iff \alpha \in](2k - 1)\pi, 2k\pi[, k \in \mathbb{Z}$. Nos extremos de quaisquer destes intervalos obtém-se a série $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n$, que é divergente; portanto a série converge absolutamente nos intervalos abertos $](2k - 1)\pi, 2k\pi[, k \in \mathbb{Z}$.
2. Para que tal aconteça é necessário que o raio de convergência seja igual a 3. O raio de convergência pode obter-se calculando $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a^{n+1}}{n+1} \frac{n+2}{a^{n+2}} \right| = \frac{1}{|a|}$. Portanto $|a| = 1/3 \iff a = \pm 1/3$. Para $a = 1/3$ tem-se em $x = \pm 3$:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \frac{(\pm 3)^n}{n} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(\pm 1)^n}{3(n+1)}.$$

Esta série diverge portanto em 3 e converge em -3 . Em $a = -1/3$ temos em $x = \pm 3$:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{-1}{3} \right)^{n+1} \frac{(\pm 3)^n}{n} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{-(\mp 1)^n}{3(n+1)}.$$

Esta série diverge portanto em -3 e converge em 3. O valor pretendido é portanto $a = -1/3$.

GRUPO II.

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
2. $f'(x) = \frac{x-1}{x} e^{1/x}$, portanto $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e f' anula-se para $x = 1$,

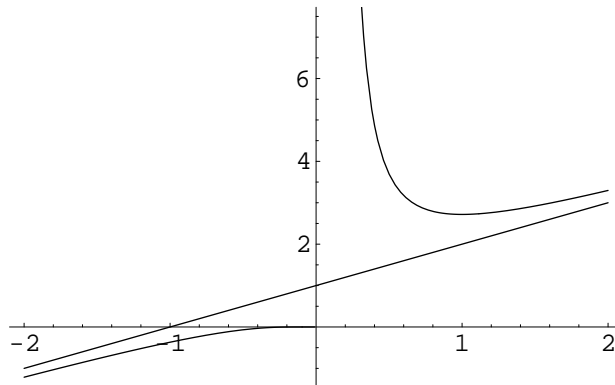


Figura 1: O gráfico de $xe^{1/x}$ e da assíntota oblíqua

3. f' anula-se em $x = 1$, sendo negativa entre 0 e 1 (não estando definida em 0), e positiva à esquerda de 0 e à direita de 1,
4. $f''(x) = \frac{1}{x^3} e^{1/x}$, e portanto a segunda derivada também não está definida em 0, sendo negativa para x negativo, e positiva para x positivo. Não existem pontos de inflexão,
5. tem-se $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0^-$, e portanto temos uma assíntota vertical em 0, mas só à direita. Vejamos se existem assíntotas oblíquas.

Tem-se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{1/x} = 1$ e $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x(e^{1/x} - 1)$. Aplicando a regra de Cauchy para levantar a indeterminação tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x(e^{1/x} - 1) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-1/x^2}{-1/x^2} e^{1/x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{1/x} = 1,$$

6. podemos reunir esta informação numa tabela que nos permite esboçar o gráfico de f :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$		
f'	$+$	\parallel	\parallel	$-$	0	$+$	$+$		
f	$-\infty$	\nearrow	0	\parallel	$+\infty$	\searrow	e	\nearrow	$+\infty$
f''	\cap	\cap	\parallel	\cup	\cup	\cup	\cup	\cup	\cup

GRUPO III.

1. Temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Embora se possa tentar aplicar a regra de Cauchy, é mais simples calcular directamente o limite escrevendo primeiro:

$$\frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} x \sin \frac{1}{x}.$$

Tem-se então: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 0$. E portanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 1 \cdot 0 = 0$$

2. Temos uma indeterminação do tipo 0^0 . Mas como:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{\sin x}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \exp [\log (x^{\sin x})] = \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \log x \right],$$

basta calcular o $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \log x$. Escrevendo este produto na forma $\frac{\log x}{\frac{1}{\sin x}}$, obtemos uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, e podemos aplicar a regra de Cauchy. Assim

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \log x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{x} \frac{\sin x}{\cos x} = -1 \cdot 0 = 0.$$

E portanto $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{\sin x}) = e^0 = 1$

GRUPO IV.

1. $f(x) = x \sin(x^2 + 2)$, $x \in \mathbb{R}$

Podemos escrever a função a primitivar na forma $u u'$ onde u é uma constante multiplicativa se tem $u(x) = \cos(x^2 + 2)$. Portanto $\int x \sin(x^2 + 2) dx = -\frac{1}{2} \cos(x^2 + 2) + K$, $K \in \mathbb{R}$.

2. $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}$, $x \in]1, +\infty[$

Vamos determinar constantes reais A, B e C tais que $\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$. Temos portanto de resolver o sistema seguinte:

$$\begin{cases} A + B & = 0 \\ 2A + C & = 1 \\ A - B - C & = 0. \end{cases}$$

Este sistema tem uma solução única, $A = 1/4$, $B = -1/4$, $C = 1/2$. Obtemos então a seguinte decomposição: $\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} \right)$. E portanto uma primitiva será:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left(\log(x-1) - \log(x+1) - \frac{2}{x+1} \right) + K = \\ \frac{1}{4} \left(\log \frac{x-1}{x+1} - \frac{2}{x+1} \right) + K, K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

GRUPO V.

1. Seja $f(x) = 1/(x^2 + 4x + 9)$; é fácil ver que f está definida para todo x e que é positiva. Separando o integral dado numa soma de dois integrais, $\int_{-\infty}^0 f + \int_0^{+\infty} f$, basta mostrar que cada um destes integrais é convergente. Para isso podemos utilizar os integrais de Dirichlet e o critério de comparação, tendo-se $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f(x) = 1 < +\infty$. Para o outro integral o raciocínio é análogo, logo o integral dado é convergente.

GRUPO VI.

Calculando a soma para os primeiros inteiros obtem-se 1, 4, 9, 16, 25 para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ respectivamente. Podemos então conjecturar que a referida soma é igual a n^2 , ou seja, $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$. Vejamos então se assim é. Seja $P(n)$ a seguinte propriedade:

$$P(n) = \left(\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2 \right).$$

Usando o princípio de indução matemática, podemos verificar que para $n = 1$ se tem de facto $2 - 1 = 1 = 1^2$, e portanto $P(1)$ é verificada. Vejamos agora que $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$. Ou seja que $P(n)$ é hereditária.

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) = \sum_{k=1}^n (2k - 1) + (2(n + 1) - 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Ou seja $\sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) = (n + 1)^2$, como queríamos. Como já vimos que $P(1)$ é verdadeira podemos concluir que $P(n)$ é verdadeira para todos os inteiros naturais seguintes, ou seja $\{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ é verdadeira} \} = \mathbb{N}$.