Relatório do Teste Formativo 3
Análise Infinitesimal I
1999-2000

GRUPO I.

1. Escrevendo $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+1})$, podemos encarar a série como uma série de Mengoli generalizada; no entanto um modo mais simples de encarar esta série consiste em utilizar a decomposição $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)})$, que também é uma série de Mengoli. Apresentamos a resolução para cada uma das decomposições. É fácil de ver as vantagens da segunda decomposição.
   No primeiro caso tem-se que a soma parcial até à ordem N das duas primeiras parcelas é:

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+2}\right) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+2} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1} + 1 - \frac{1}{N+1}\right) + \left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{N+2}\right) \\ &= 2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}. \end{aligned}$$

   Portanto a soma parcial até à ordem N é

$$\begin{aligned} S_N &= \frac{1}{2}\left(2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} - 2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}\right). \end{aligned}$$

   E portanto tem-se $\lim S_N = \frac{1}{2}\lim\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}\right) = \frac{1}{4}$.

No segundo caso tem-se:

$$\begin{aligned}
2S_N &= \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\
&= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}-\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{(n)(n+1)}\\
&= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{1.2}-\frac{1}{(N+1)(N+2)}\\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{(N+1)(N+2)},
\end{aligned}$$

E portanto tem-se $\lim S_N = \frac{1}{2}\lim\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(N+1)(N+2)}\right)=\frac{1}{4}$.

2. Seja $y=\frac{x}{x+1}$. Então a série dada converge absolutamente para $|y|<1$; e portanto $|y|<1 \iff |\frac{x}{x+1}|<1 \iff |x|<|x+1|$, para $x\neq -1$. Uma maneira simples de resolver esta inequação é pensar no significado geométrico do módulo; queremos obter os x cuja distância à origem é menor que a distância a -1, ou seja os x que estão mais perto de 0 que de -1. Uma vez que o ponto médio do segmento $[-1,0]$ é $\frac{-1}{2}$ (valor de x para o qual $|x|=|x+1|$), a solução será o intervalo aberto $]\frac{-1}{2},+\infty[$. No ponto $x=-1/2$ obtemos a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$ que é divergente, visto que $(-1)^n \nrightarrow 0$.

GRUPO II.

1. $D_f=\mathbb{R}$,

2. $f'(x)=((1-x^3)^{1/3})'=-x^2(1-x^3)^{-2/3}$, portanto $D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$, e f' anula-se para $x=0$,

3. f' anula-se em $x=0$, sendo sempre negativa (não estando definida em 1) ,

4. $f''(x)=\frac{2x}{x^3-1}(1-x^3)^{-2/3}$, e portanto a segunda derivada também não está definida em 1, sendo nula em $x=0$, positiva à esquerda de 0 e à direita de 1 e negativa entre 0 e 1; em $x=0$ temos um ponto de inflexão, visto que a primeira derivada que não se anula em $x=0$, é de ordem ímpar (verifique que $f'''(0)\neq 0$),

5. tem-se $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\frac{1-x^3}{x^3}}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}=-1$. E $\lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}+x)$ é uma indeterminação do tipo $\mp\infty\pm\infty$. Para levantar esta indeterminação vamos usar a identidade $(a+b)(a^2-ab+$

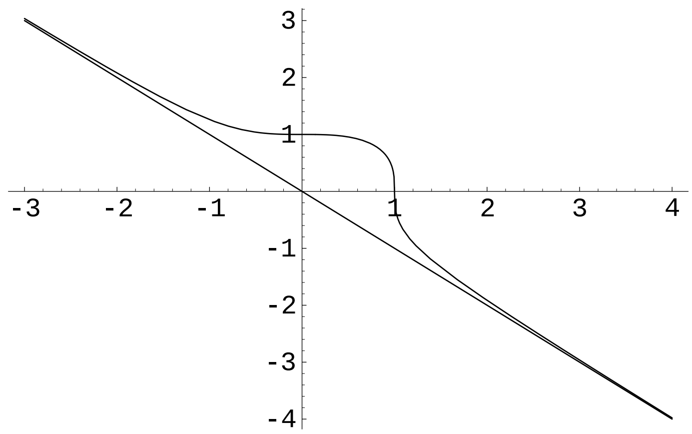

Figura 1: O gráfico de $\sqrt[3]{1-x^3}$ e da assímptota oblíqua

$b^2) = a^3+b^3$, com $a = \sqrt[3]{1-x^3}\,, b = x$, e portanto $a^3+b^3 = 1\,$; obtem-se

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1-x^3}+x &= \frac{(\sqrt[3]{1-x^3}+x)(\sqrt[3]{(1-x^3)^2}-\sqrt[3]{1-x^3}\,x+x^2)}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}-\sqrt[3]{1-x^3}\,x+x^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}-\sqrt[3]{1-x^3}\,x+x^2}\,, \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}+x) &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}-\sqrt[3]{1-x^3}\,x+x^2} \\ &= \frac{1}{+\infty-(\mp\infty)(\pm\infty)+\infty} = \frac{1}{+\infty} \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

temos assim uma assímptota oblíqua à esquerda e à direita, de equação $y = -x\,$,

6. podemos reunir esta informação numa tabela que nos permite esboçar o gráfico de f :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$-$	$\|$	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
f''		$\bigcup$	0	$\bigcap$	$\|$	$\bigcup$	

Utilizando estas informações podemos finalmente esboçar o gráfico da função e da assímptota.

GRUPO III.

1. Temos uma indeterminação do tipo ∞^0. Mas como:

$$(\log x)^{\frac{-2}{x}} = \exp\left[\log\left((\log x)^{\frac{-2}{x}}\right)\right] = \exp\left[\frac{-2}{x}\log(\log x)\right] .$$

Portanto basta-nos calcular $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\log(\log x)}{x}$, que é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando a Regra de Cauchy obtem-se imediatamente que o limite anterior é igual a zero e portanto o limite inicial será igual a $e^0 = 1$.

2. Temos uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$. Para podermos usar a Regra de Cauchy vamos transformar esta diferença num quociente $\frac{\cos x\sin x - x}{x\cos x\sin x}$, obtendo-se agora uma indeterminação do tipo $0/0$. Antes de aplicarmos a Regra de Cauchy é conveniente substituir $\cos x\sin x$ por $\frac{\sin 2x}{2}$. Aplicando a Regra de Cauchy 2 vezes seguidas (verifique que o podemos fazer) tem-se:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x - 2x}{x\sin 2x} = \lim_{x\to0}\frac{(\sin 2x - 2x)'}{(x\sin 2x)'} = \lim_{x\to0}\frac{2\cos 2x - 2}{\sin 2x + 2x\cos 2x} =$$
$$\lim_{x\to0}\frac{(2\cos 2x - 2)'}{(\sin 2x + 2x\cos 2x)'} = \lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x\sin 2x - \cos 2x} = \frac{0}{-1} = 0 .$$

GRUPO IV.

1. $f(x) = e^x\cos x, x\in\mathbb{R}$.
Primitivando por partes, pondo $u' = e^x$ e $v = \cos x$ temos $\int e^x\cos x\,dx = \int u'v = uv - \int uv' = e^x\cos x + \int e^x\sin x\,dx$. Primitivando novamente por partes pondo $u' = e^x$ e $v = \sin x$ temos $\int e^x\sin x\,dx = e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx$ e portanto

$$\int e^x\cos x\,dx = e^x\cos x + \int e^x\sin x\,dx = e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx ,$$

ou seja

$$\int e^x\cos x\,dx = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) , \forall x\in\mathbb{R} .$$

2. $f(x) = \frac{1}{x(x-2)^2}, x\in]2, +\infty[$.
Vamos determinar constantes reais A, B e C tais que $\frac{1}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$. Temos portanto de resolver o sistema seguinte:

$$\begin{cases} A + B &= 0 \\ -4A - 2B + C &= 0 \\ 4A &= 1 . \end{cases}$$

Este sistema tem uma solução única, $A = 1/4, B = -1/4, C = 1/2$. Obtemos então a seguinte decomposição: $\frac{1}{x(x-2)^2} = \frac{1}{4}(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2})$. E portanto uma primitiva será:

$$\frac{1}{4}\left(\log x - \log(x-2) - \frac{2}{x-2}\right) + K =$$
$$\frac{1}{4}\left(\log \frac{x}{x-2} - \frac{2}{x-2}\right) + K, K \in \mathbb{R}.$$

GRUPO V.

1. A função integranda não está definida no ponto $x = 1$, e temos um intervalo de integração ilimitado. Vamos separar este integral em dois, de 1 a 2 e de 2 a $+\infty$. Tem-se $\lim_{x\to+\infty} x^{3/2}\frac{1}{x\sqrt{x-1}} = 1 < +\infty$, portanto tem-se $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ convergente em consequência do critério de comparação com os integrais de Dirichlet. Utilizando a desigualdade $x\sqrt{x-1} \geq \sqrt{x-1}$, $\forall x \geq 1$ tem-se

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} \leq \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} < +\infty,$$

onde utilizámos o facto de $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ ser convergente para $\alpha \in]-\infty, 1[$. E portanto o integral dado é convergente.

GRUPO VI.

Comecemos por ver que a propriedade $P(n) = (2n - 3 \leq 2^{n-2})$ se verifica para $n = 5$. Temos $10 - 3 = 7 < 2^{5-2} = 2^3 = 8$, ou seja $7 < 8$, o que é verdade. Suponhamos agora que a propriedade é verdadeira para n. Então para $n+1$ tem-se
$2(n+1)-3 = (2n-3)+2 \leq 2^{n-2}+2 \leq 2^{n-2}+2^{n-2} = 2\,2^{n-2} = 2^{n-1} = 2^{(n+1)-2}$,
ou seja $2(n+1) - 3 \leq 2^{(n+1)-2}$, como queriamos. E portanto pelo princípio de indução matemática a propriedade é hereditária a partir de $n = 5$.
(Nota: $2 \leq 2^{n-2}$, visto que $n \geq 5$.)