Exame de 12 de Julho de 2001

GRUPO I. (7,5 valores)

Considere a família de funções definida por

$$f(x) = x^2 - 2x + k\,,\ k \in \mathbb{R}\,.$$

1. Calcule os possíveis valores para k de modo a que o gráfico de f não intersecte o eixo das abcissas.

2. <u>Nas três alíneas seguintes faça $k = -8$.</u>

2a. Determine as coordenadas do vértice da parábola que representa f.

2b. Indique, no caso de existirem, os extremos da função.

2c. Resolva a inequação $f(x) > 0$.

GRUPO II. (2,5 valores)

Seja $f(x) = \dfrac{xe^x}{1-x}$. Determine o domínio de f, calcule f', e mostre que $f'(0) = 1$.

GRUPO III. (4 valores)

1. Calcule o limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2-2)(x^3+5)}{3x^4+7}$.

2. Dê um exemplo de sucessões u_n e v_n satisfazendo as seguintes condições: $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ e $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

GRUPO IV. (2 valores)

Sejam A e B os pontos de abcissa $\sqrt{2}$ que pertencem à elipse de equação $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{8} = 1$. Calcule a área do triângulo $\triangle AOB$, onde O é a origem.

GRUPO V. (4 valores)

$$\text{Seja } g(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{se } x \in [0,1[\,, \\ 2x & \text{se } x \in [1,2[\,, \\ 2 & \text{se } x \in [2,+\infty[\,. \end{cases}$$

a. Esboce o gráfico de g .

b. Determine os valores de $x \in [0,+\infty[$ onde g é contínua.